Devoir de Mathématiques 5

vendredi 7 février 2014

Durée : 4 heures

Remarques générales :

- Vérifiez que le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.
- Vous êtes invité à apporter une attention particulière à la présentation et à la rédaction ; les copies peu lisibles ou mal présentées seront sanctionnées.
- Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

L'utilisation d'un téléphone portable est interdite

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 1. Étude d'une matrice

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$. On considère la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont définis par

$$m_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Nous étudions dans cet exercice l'inversibilité de la matrice M. On détermine lorsque c'est possible l'inverse de M.

1. **Dans cette question** $n = 2$. Justifier que M est inversible et calculer M^{-1}.

On revient au cas général. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère les matrices auxiliaires : I la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et U la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée uniquement de 1 (*i.e.* pour tout $i, j \in \{1, .., n\}$, $u_{i,j} = 1$).

2. Calculer le rang de la matrice U ; cette matrice est-elle inversible ?
3. Exprimer la matrice M comme combinaison linéaire de I et U.
4. Calculer U^2 à l'aide de U puis en déduire une expression de M^2 à l'aide de I et U.
5. En déduire une matrice N telle que :
$$MN = (n+1)I$$
6. Justifier que M est inversible et donner une expression de l'inverse M^{-1} comme combinaison linéaire de I et U.

Exercice 2. Points fixes d'une fonction croissante

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction **croissante**. On se propose de montrer que f possède au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

On suppose $f(0) \neq 0$, le cas où $f(0) = 0$ montrant qu'un tel x_0 existe.

On note $A = \{x \in [0,1] \ : \ f(x) > x\}$.

1. Rappeler la définition de la *borne supérieure* d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que A admet une borne supérieure. On pose $S = \sup(A)$.
3. On veut montrer que $f(S) = S$.
   (a) Cas 1. On suppose que $f(S) > S$. Établir que $[S, f(S)[\subset A$. En déduire une contradiction.
   (b) Cas 2. On suppose que $f(S) < S$. Établir que $[f(S), S] \cap A = \emptyset$. En déduire une contradiction.
   (c) Conclure.

Problème 1. Étude d'une suite récurrente

Le but du problème est d'étudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

Partie I. Étude de la limite

L'objectif de cette partie est de déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

1. Expliquer pourquoi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie puis écrire une fonction Pyhton `suite(u0,n)` qui pour un flottant `u0` et un entier `n` donnés en argument retourne une valeur (approchée) pour u_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons la relation :
$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n.$$
3. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.
   (a) Montrer que $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$;
   (b) Montrer que $f(x) > x$ pour tout $x > 0$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.
5. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie II. Un équivalent simple de la suite $(u_n)_n$

L'objectif de cette partie est de donner un équivalent simple de la suite $(u_n)_n$.

6. Montrer que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
7. Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \dfrac{1}{2}$. Au passage, quel équivalent de $u_{n+1} - u_n$ en découle ?

Soient $(v_n)_n$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $(S_n)_n$ celle de terme général $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   (a) Justifier qu'il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $k \geq n_\varepsilon$:
$$\left| v_k - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq n_\epsilon$
$$\left| S_n - \frac{n}{2} \right| \leq \sum_{k=0}^{n_\varepsilon - 1} \left| v_k - \frac{1}{2} \right| + (n - n_\varepsilon)\frac{\varepsilon}{4}.$$

(c) Montrer qu'il existe un entier $n'_\varepsilon \geq n_\varepsilon$ tel que pour tout entier $n \geq n'_\varepsilon$,

$$\frac{\sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1} |v_k - \frac{1}{2}|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

(d) En déduire que pour tout entier $n \geq n'_\varepsilon$,

$$|S_n - \frac{n}{2}| \leq \varepsilon\,\frac{n}{2}.$$

9. Montrer à l'aide de la question précédente que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.
10. En remarquant que S_n est une somme télescopique, en déduire un *équivalent simple* de u_n.

Problème 2. Une C.N.S. pour qu'un polygone soit régulier

Le problème se décompose en 3 parties. Dans ce problème, le plan euclidien est rapporté à un R.O.N. direct.

Partie 1. Questions de cours

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler la définition d'une racine $n-$ième de l'unité, puis décrire l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n-$ièmes de l'unité, en indiquant le nombre d'éléments de $\mathbb{U}_n$.
2. On suppose $n \geq 2$. Soit $z \in \mathbb{U}_n$ avec $z \neq 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.
3. Déterminer l'ensemble des racines sixièmes de l'unité écrites sous forme trigonométrique. Placer les images des racines trouvées dans le plan (unité = 4cm).

Partie 2. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Soient un entier $n \geq 2$ et $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes non nuls. On se propose d'établir que

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n| \qquad (IT)$$

et que l'égalité se produit si et seulement si les nombres complexes ont le même argument.

On rappelle l'inégalité triangulaire, soit :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

4. Montrer que si l'inégalité (IT) est vraie pour une famille de n nombres complexes alors elle est vraie pour une famille $n+1$ complexes.
   En déduire que l'inégalité demandée est vraie pour toute famille finie de nombres complexes.

Dans les questions suivantes, on se propose de montrer par récurrence que l'inégalité (IT) est une égalité si et seulement si

$$\arg(z_1) \equiv \cdots \equiv \arg(z_n)\ [2\pi].$$

5. **Cas d'égalité pour** $n = 2$.
   (a) Montrer que l'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ est équivalente à $\mathrm{Re}(\overline{z_1}\, z_2) = |z_1|\,|z_2|$.
   (b) En écrivant z_1 et z_2 sous forme trigonométrique, conclure que $\mathrm{Re}(\overline{z_1}\, z_2) = |z_1|\,|z_2|$ se produit si et seulement si $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi]$. Conclure
6. On suppose avoir établi le cas d'égalité au rang n. Soient $z_1, \cdots, z_{n+1}$ des nombres complexes non nuls tels que

$$|z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

   (a) En posant $z = z_1 + \cdots + z_n$ et $z' = z_{n+1}$ montrer que

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n| \text{ et } |z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}| = |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}|.$$

   (b) En déduire que $\arg(z_1) \equiv \cdots \equiv \arg(z_n) \equiv \arg(z_{n+1})\ [2\pi]$. Conclure.

Partie 3. C.N.S. dans le cas général

Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Soient $M_1, \cdots, M_n$ des points distincts du plan d'affixe respective $z_1, \cdots, z_n$ de telle sorte que

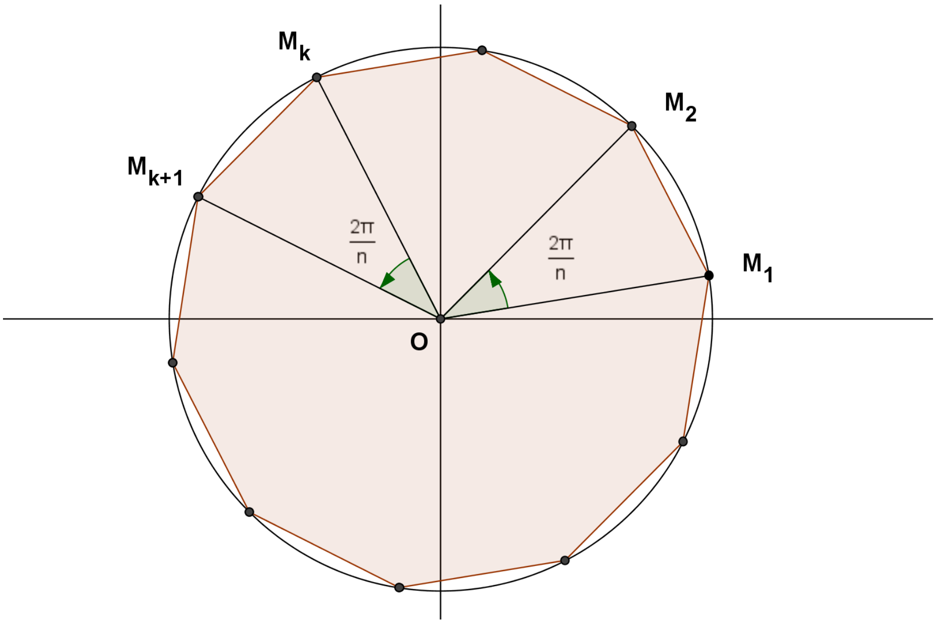
$$|z_1| = \cdots = |z_n| = r \text{ avec } r > 0.$$

On dit que le polygone direct $M_1 \cdots M_n$ est un polygone régulier si

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}) = \cdots = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_n}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_0}}) = \frac{2\pi}{n}.$$

L'objectif de cette partie est de montrer que le polygone direct $M_1 \cdots M_n$ est régulier si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} \, z_k = n \, z_1.$$



7. Dans cette question, on suppose que le polygone direct $M_1 \cdots M_n$ est un polygone régulier
   (a) On pose $z_1 = r\, e^{i\varphi}$. Déterminer le module et un argument de z_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} \, z_k = n \, z_1$.
8. Dans cette question, on suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} \, z_k = n \, z_1$.
   (a) Déterminer $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} \, z_k\right|$. En déduire que $\arg(\omega^{n+1-k} \, z_k) \equiv \arg(z_1) \, [2\pi]$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.
   (b) Conclure que le polygone $M_1 \cdots M_n$ est régulier.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Fin de l'épreuve