Concours blanc 2014 : corrigé

PREMIER PROBLÈME

Ce problème a pour objet le calcul et l'étude asymptotique de la probabilité d'évènements réalisant des tirages sans *point fixe* dans différentes expériences aléatoires.

Préambule et notations

Étant donné un entier $n \geq 1$ les expériences aléatoires considérées mettent en jeu une urne $\mathcal{U}_n$ contenant n boules numérotées de 1 à n. Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A. Tirages avec remise

Partie A-1. Étude d'une fonction

On considère la fonction h d'une variable réelle x définie par l'expression : $h(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}\cdot$

1. La fonction est définie sur $D =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$; elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ce domaine comme quotient de fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
2. **Prolongement.** Avec l'équivalent usuel $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ il vient $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ et sans difficulté :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} h(x) = -1}$$

La fonction h est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ et admet une **limite finie** en 0. On prolonge h en posant :

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

La dérivabilité a déjà été vue sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. Reste à la vérifier en 0. Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{h(x)+1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+(1-x)x}{(1-x)x^2} \end{aligned}$$

Rappelons que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Cela nous donne :

$$\frac{\ln(1-x)+x}{(1-x)x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

En conclusion le taux d'accroissement de h admet une limite finie en 0. La fonction est donc dérivable en 0. Nous avons :

$$\boxed{h'(x) = \begin{cases} \frac{x+(1-x)\ln(1-x)}{x^2(x-1)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

3. Pour tout $x \in]-\infty, 1[$ nous avons $x^2(1-x) > 0$ donc $h'(x) = \dfrac{-k(x)}{1-x)x^2}$ est du signe opposé (cela se vérifie aussi en 0) à celui de la quantité

$$k(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$$

La fonction k est clairement dérivable pour tout $x \in]-\infty, 1[$ et : $k'(x) = -\ln(1-x)$. Nous avons donc le tableau des variations :

x	$-\infty$		0		1
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

La fonction k est positive.

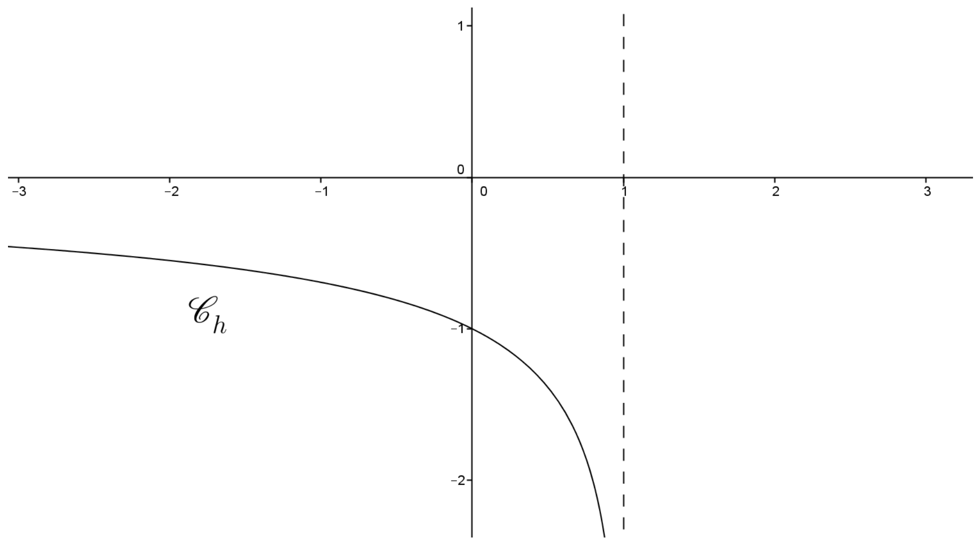
4. Nous avons les limites :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} h(x) = -\infty}$$

5. Avec les résultats des questions précédentes nous pouvons donner le tableau des variations de h :

x	$-\infty$		0		1
$h(x)$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

La fonction h est **continue** et **strictement décroissante** sur $]-\infty, 1[$. D'après le théorème de la bijection elle induit une application bijective de $]-\infty, 1[$ vers l'intervalle image $J =]-\infty, -1[$.
La courbe $\mathscr{C}_h$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
Nous avons l'allure de la courbe $\mathscr{C}_h$ d'équation $y = h(x)$ dans un repère orthonormé direct :



Partie A-2. Tirages simples

Étant donné un entier $n > 0$ on considère l'expérience aléatoire consitant en n tirages **successifs et avec remises** de boules de l'urne $\mathscr{U}_n$; une issue pour cette expérience aléatoire est donc une liste de n entiers compris entre 1 et n.

6. C'est un dénombrement usuel : $\boxed{\operatorname{card} \Omega = n^n}$. L'univers est muni de la probabilité uniforme P donc pour un évènement $\mathcal{F}$ relatif à l'univers Ω :

$$\boxed{P(\mathcal{F}) = \frac{\operatorname{card} \mathcal{F}}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{\text{nbre d'issues favorables à } \mathcal{F}}{\text{nbre d'issues total}}}$$

Un *point fixe* pour une issue de l'expérience est un entier $k \leq n$ tel que la boule portant le numéro k apparaît en k-ième position.

7. Soit l'évènement $\mathcal{F}_0$: « le résultat est sans point fixe ». Pour obtenir un résultat sans point fixe : pour le tirage de la $k$ième boule $(0 \leq k \leq n)$, il y a $n-1$ numéros possibles (toutes les boules sauf celle portant le numéro k). Il en résulte que $\operatorname{card} \mathcal{F}_0 = (n-1)^n$ ainsi :

$$\boxed{P(\mathcal{F}_0) = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

8. Nous vérifions que :

$$\exp\left(h\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = P(\mathcal{F}_0)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -1$ il vient par composition des limites :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(\mathcal{F}_0) = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(h\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{e}\cdot}$$

Partie A-3. Tirages multiples

On fixe un entier $p>0$ et on considère un entier $n \geq p$. On considère l'expérience aléatoire consitant en n tirages **successifs et avec remises** de p boules de l'urne $\mathscr{U}_n$; une issue pour cette expérience aléatoire est donc une liste de n sous-ensembles de p nombres compris entre 1 et n. L'ensemble Ω des issues possibles est toujours muni de la probabilité uniforme.

On dit toujours qu'une issue de l'expérience admet pour *point fixe* un entier $k \leq n$ lorsque la boule portant le numéro k apparaît dans le k-ième tirage.

9. Soit l'évènement $\mathcal{F}_0$: « le résultat est sans point fixe ». Pour obtenir un résultat sans point fixe : pour le tirage de la $k$ième boule ($0 \leq k \leq n$), il faut choisir p boules parmi $n-1$ (toutes sauf celle portant le numéro k). Nous avons donc
$$\operatorname{card}\mathcal{F}_0 = \binom{n-1}{p}^n.$$
Le nombre de sous-ensembles de p entiers compris entre 1 et n est donné par le coefficient binomial $\binom{n}{p}$. L'univers Ω est de cardinal
$$\operatorname{card}\Omega = \binom{n}{p}^n.$$
Puisque Ω est muni de la probabilité uniforme on obtient :
$$\boxed{P(\mathcal{F}_0) = \left(\frac{\binom{n-1}{p}}{\binom{n}{p}}\right)^n = \left(1-\frac{p}{n}\right)^n}$$

10. Par un calcul très similaire à celui donnant le résultat de la question 8 on vérifie que :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(\mathcal{F}_0) = \frac{1}{e^p}}$$

Partie B. Tirages sans remise

Partie B-1. Formule d'inversion de Pascal

On établit dans cette question la formule $(\star)$ *d'inversion de Pascal*.
Soit $(n,k,j)\in\mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq j \leq k \leq n$.

11. On a les égalités :
$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.\frac{(n-j)!}{(n-k)!(k-j)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}.$$

12. Le changement d'indice $l = n - k$ dans la somme considérée donne :

$$\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-j}{n-k} = \sum_{k=0}^{n-j}(-1)^{l}\binom{n-j}{l} = (1-1)^{n-j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$$

13. Soit f une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $g(k) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f(j)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f(j)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}f(j)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\underbrace{\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}}_{\text{avec Q.11}}f(j)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)\underbrace{\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-j}{n-k}}_{\text{avec Q.12}}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k) = \binom{n}{n}f(n) = f(n)}.$$

Partie B-2. Tirages simples

Étant donné un entier $n > 0$ on considère l'expérience aléatoire consitant en n tirages **successifs et sans remises** de boules de l'urne $\mathscr{U}_n$; une issue pour cette expérience aléatoire est donc une permutation de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ des entiers compris entre 1 et n. L'ensemble Ω des issues possibles est muni de la probabilité uniforme P.

Un *point fixe* pour une issue de l'expérience est un entier $k \leq n$ tel que la boule portant le numéro k apparaît en k-ième position. Une issue sans point fixe est appelée *dérangement*. On note d_n le nombre de dérangements parmi les permutations de $[\![1, n]\!]$. Par convention on pose $d_0 = 1$.

14. Nous avons les valeurs $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ et $d_3 = 2$.
15. Fixons un entier $k > 0$. Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$ on considère l'évènement $\mathcal{F}_j$ regroupant l'ensemble des permutations de $[\![1, k]\!]$ ayant *exactement* j points fixes.
    (a) Pour déterminer une permutation ayant j points fixes :
    - on choisit les j points fixes parmi les k possibles : il y a $\binom{k}{j}$ choix possibles ;
    - on choisit un dérangement pour les $k - j$ positions restantes : il y a par définition d_{k-j} possibilités.

    Nous avons donc : $\boxed{\operatorname{card}\mathcal{F}_j = \binom{k}{j}d_{k-j}}$.

    (b) La famille d'évènements $(\mathcal{F}_j)_{0\leq j\leq k}$ est un système complet de l'univers Ω des permutations de $[\![1, k]\!]$. Ainsi :

    $$\operatorname{card}\Omega = \sum_{j=0}^{k}\operatorname{card}\mathcal{F}_j$$

    d'où :

    $$k! = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}d_{k-j} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{k-j}d_{k-j} \text{ car } \binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$$

Par réindexation $j \leftarrow k-j$:

$$\boxed{k! = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} d_j}.$$

16. L'évènement $\mathcal{F}_0$ s'identifie à l'évènement « l'issue est un dérangement ».
On applique la formule d'*inversion de Pascal* avec $f(n) = d_n$. Nous avons avec la question précédente :

$$g(k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f(j) = k!$$

Il vient avec la formule d'inversion :

$$d_n = f(n) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)!$$

La probabilité $P(\mathcal{F}_0)$ de l'évènement $\mathcal{F}_0$ est donnée par la formule :

$$\boxed{P(\mathcal{F}_0) = \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}.$$

Partie B-3. Étude asymptotique

17. L'identité cherchée est une conséquence de la formule de Taylor avec reste intégral qui sera démontrée en cours. On l'obtient par récurrence en procédant à une IPP pour vérifier l'hérédité.

$$\boxed{\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t}$$

18. Pour tout $t \in [-1, 0]$, on a $0 \leq 1+t \leq 1$ puis $0 \leq (1+t)^n e^t \leq e^t$. Ainsi on a l'inégalité :

$$0 \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^n e^t \mathrm{d}t \leq \int_{-1}^{0} e^t \mathrm{d}t = 1 - e^{-1} \leq 1.$$

L'égalité de la qestion précédente permet d'obtenir la majoration suivante :

$$|P(\mathcal{F}_0) - \frac{1}{e}| = \left| \int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{n!}.$$

Par comparaison on peut en déduire la limite

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(\mathcal{F}_0) = \frac{1}{e}}$$

SECOND PROBLÈME

Partie I. Étude d'un exemple

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par l'expression :

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+2y-z+t\\-x+y+t\\-x+y+t\\y-z\end{pmatrix}.$$

1. Nous avons la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$M = \begin{pmatrix}-1&2&-1&1\\-1&1&0&1\\-1&1&0&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$$

2. Par une méthode de pivot on obtient $\boxed{\operatorname{rg} M = 2}$ et la formule du rang nous permet d'en déduire que $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 2}$.
   Déterminons une base (v_1, v_2) de $\operatorname{Ker} f$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases}-x+2y-z+t=0\\-x+y+t=0\\-x+y+t=0\\y-z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=z+t\\y=z\end{cases}$$

   Ainsi :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z+t\\z\\z\\t\end{pmatrix} = z\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_2}$$

   La famille v_1, v_2 est génératrice de $\operatorname{Ker} f$; comme l'espace est de dimension 2, la famille est une base.
3. Justifier que la matrice M est nilpotente ; préciser l'indice de nilpotence. Que peut-on en déduire pour les itérés $f \circ f \cdots \circ f$ de l'endomorphisme f ?

On considère les vecteurs $w_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $w_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $w_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $w_4 \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

4. On vérifie par un calcul que la famille $\mathcal{B}'(w_1, w_2, w_3, w_4)$ est libre. Comme elle comporte autant de vecteur que la dimension de l'espace c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Pour $i \in [\![1, 4]\!]$,

$$f(w_1) = 0_{\mathbb{R}^4}; f(w_2) = w_1; f(w_3) = 0_{\mathbb{R}^4}; f(w_4) = w_3.$$

   On peut en déduire la matrice G de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$:

$$G = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

   La formule de changement de base nous permet d'écrire la relation $G = P^{-1}MP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ (base canonique de $\mathbb{R}^4$) à $\mathcal{B}'$.

$$P = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

Par un calcul on obtient l'inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans les parties qui suivent on revient au cas général.

Partie II. Sur le rang et l'indice

Dans les questions qui suivent $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne une matrice nilpotente d'indice p.

6. Si $\operatorname{rg} N = n$ alors N est une matrice inversible donc N^p est également inversible. Or N^p est la matrice nulle ; donc $\operatorname{rg} N \leq n-1$.
7. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à N.
   (a) N^{p-1} n'est pas la matrice nulle donc l'endomorphisme φ^{p-1} n'est pas nul. Ainsi il existe $x_0 \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi^{p-1}(x_0) \neq 0$.
   (b) Soit $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tel que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 \varphi(x_0) + ... + \lambda_{p-1}\varphi^{p-1}(x_0) = 0$.
   Supposons qu'il existe $k \in \{0, ..., p-1\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$ et notons $k_0 = \min\{k, \lambda_k \neq 0\}$. Nous avons alors :

   $$\lambda_{k_0}\varphi^{k_0}(x_0) + ... + \lambda_{p-1}\varphi^{p-1}(x_0) = 0$$

   Appliquons l'endomorphisme φ^{p-1-k_0} à l'égalité précédente. Comme φ^k est nul pour tout $k \geq p$ il vient $\lambda_{k_0}\varphi^{p-1}(x_0) = 0$. Mais $\varphi^{k_0}(x_0) \neq 0$ donc $\lambda_{k_0} = 0$ ce qui est contradictoire.
   Ainsi tous les λ_k sont nuls donc la famille $\mathcal{B}_{x_0}$ est libre. La famille $\mathcal{B}_{x_0}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, donc

   $$p = \operatorname{card} \mathcal{B}_{x_0} \leq \dim \mathbb{R}^n = n$$

Partie III. Classification pour la relation de similitude des matrices nilpotentes cycliques

Définition. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est semblable à* une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ lorsqu'il existe $P \in \mathrm{G}\ell_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P.B.P^{-1}$$

8. Soit A, B et C des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - A est semblable à A car $A = I.A.I^{-1}$. La relation est **réflexive**.
   - Si A est semblable à B alors il existe $P \in \mathrm{G}\ell_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P.B.P^{-1}$. Nous avons donc $B = P^{-1}.A.P = P^{-1}.A.(P^{-1})^{-1}$ ainsi B est semblable à A. La relation est **symétrique**.
   - Si A est semblable à B et B est semblable à C alors il existe $P \in \mathrm{G}\ell_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P.B.P^{-1}$ et $Q \in \mathrm{G}\ell_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q.C.Q^{-1}$. Ainsi :

     $$A = P.Q.C.Q^{-1}.P^{-1} = PQ.C.(PQ)^{-1}$$

     La relation est **transitive**.

   En conclusion la relation « *être semblable à* » définie une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Vérifions qu 'une matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est d'indice $n = p$ **si et seulement si** il existe $P \in \mathrm{G}\ell_n(\mathbb{K})$ telle que $N = PJ_nP^{-1}$.
   - ($\Leftarrow$). Soit N telle que $N = PJ_nP^{-1}$. On vérifie sans difficulté que J_n est nilpotente d'ordre n (en considérant par exemple l'endomorphisme canoniquement associé). Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N^k = PJ_n^kP^{-1}$. Donc $N^{n-1} \neq 0$ et $N^n = 0$.

- (⇒). Soit N une matrice nilpotente d'indice $n = p$.
  La famille $\mathcal{B}_{x_0}$ est une famille libre de cardinal $p = n$ donc maximale dans $\mathbb{R}^n$: c'est une base de $\mathbb{R}^n$. En posant pour $k \in \{1, ..., n\}$, $u_k = \varphi^{k-1}(x_0)$ il vient :

$$\varphi(u_k) = \begin{cases} u_{k+1} & \text{si } k \in \{1, ..., n-1\} \\ 0 & \text{si } k = n \end{cases}$$

  La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_{x_0} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ est J_n.
  Dans la base $\mathcal{B}_{x_0}$, la matrice de φ est J_n. En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_{x_0}$, la formule de changement de base donne $J_n = P^{-1}NP$ ou encore $N = PJ_nP^{-1}$.

Barème. Total /90

Présentation - Rédaction. /3

Problème 1. /57

Partie A. 1. 2 pts ; 2. 5 pts ; 3. 4 pts ; 4. 2 pts ; 5. 5 pts ; 6. 2 pts ; 7. 2 pts ; 8. 2 pts ; 9. 3 pts ; 10. 3 pts.

Partie B. 11. 2 pts ; 12. 3 pts ; 13. 4 pts ; 14. 3 pts ; 15. (a) 3 pts , (b) 3 pts ; 16. 3 pts ; 17. 3 pts ; 18. 3 pts.

Problème 2. /30

Partie 1. 1. 2 pts ; 2. 4 pts ; 3. 2 pts ; 4. 1 pt ; 5. 6 pts.

Partie 2. 6. 2 pts ; 7. (a) 1pt , (b) 4pts.

Partie 3. 8. 3 pts ; 9. 5 pts.

Résultats

	Moyenne	**Max**	**Min**
Problème 1	13.8	32	0
Problème 2	9.43	20	4
P - R	1.57	3	0
TOTAL	24.8	51	6