Concours blanc 2014

Épreuve de Mathématiques

mardi 6 mai

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone portable est **interdite**. Le candidat doit vérifier que le sujet comprend 6 pages.

⋆⋆⋆

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

⋆⋆⋆

Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants que vous traiterez sur ***DEUX COPIES DISTINCTES*** que vous rendrez séparément.

⋆⋆⋆

PREMIER PROBLÈME

Ce problème a pour objet le calcul et l'étude asymptotique de la probabilité d'évènements réalisant des tirages sans *point fixe* dans différentes expériences aléatoires.

Préambule et notations

Étant donné un entier $n \geq 1$ les expériences aléatoires considérées mettent en jeu une urne $\mathcal{U}_n$ contenant n boules numérotées de 1 à n. Les boules sont indiscernables au toucher.

La factorielle d'un entier n est notée $n!$ avec la convention $0! = 1$.

Pour un couple d'entiers (n, k) on rappelle la définition du coefficient binomial « k parmi n » :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } n \geq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cardinal d'un ensemble fini $\mathcal{F}$ est noté $\operatorname{card} \mathcal{F}$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A. Tirages avec remise

Partie A-1. Étude d'une fonction

On considère la fonction h d'une variable réelle x définie par l'expression : $h(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de h et justifier que la fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ce domaine.
2. **Prolongement.** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ puis en déduire que h se prolonge en une fonction continue sur $]-\infty, 1[$; on note toujours h la fonction prolongée.
   Justifier que le prolongement est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$.
3. Vérifier que $h'(x)$ est du signe opposé à celui de la quantité $k(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$. Étudier les variations de la fonction k pour en déduire son signe.
4. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$ aux bornes du domaine de définition de h.
5. Justifier que la fonction h induit une bijection de $]-\infty, 1[$ vers un domaine J à préciser. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_h$ d'équation $y = h(x)$ dans un repère orthonormé direct en précisant les asymptotes.

Partie A-2. Tirages simples

Étant donné un entier $n > 0$ on considère l'expérience aléatoire consitant en n tirages **successifs et avec remises** de boules de l'urne $\mathscr{U}_n$; une issue pour cette expérience aléatoire est donc une liste de n entiers compris entre 1 et n.

L'ensemble Ω des issues possibles est muni de la probabilité uniforme P.

6. Exprimer en fonction de n le nombre $\operatorname{card}\Omega$. Étant donné un évènement $\mathcal{F}$ relatif à l'univers Ω par quelle formule calcule-t'on la probabilité $P(\mathcal{F})$?

Un *point fixe* pour une issue de l'expérience est un entier $k \leq n$ tel que la boule portant le numéro k apparaît en k-ième position.

Exemples avec $n = 6$.

2	3	6	5	6	3

Issue 1

2	3	3	1	5	4

Issue 2

L'issue 1 est sans *point fixe* tandis que l'issue 2 admet deux *points fixes* (les tirages 3 et 5).

7. Soit l'évènement $\mathcal{F}_0$: « le résultat est sans point fixe ». Exprimer en fonction de l'entier n la probabilité $P(\mathcal{F}_0)$.
8. Vérifier que $P(\mathcal{F}_0) = \exp\left(h\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\mathcal{F}_0)$.

Partie A-3. Tirages multiples

On fixe un entier $p > 0$ et on considère un entier $n \geq p$. On considère l'expérience aléatoire consitant en n tirages **successifs et avec remises** de p boules de l'urne $\mathscr{U}_n$; une issue pour cette expérience aléatoire est donc une liste de n sous-ensembles de p entiers compris entre 1 et n. L'ensemble Ω des issues possibles est toujours muni de la probabilité uniforme.

On dit toujours qu'une issue de l'expérience admet pour *point fixe* un entier $k \leq n$ lorsque la boule portant le numéro k apparaît dans le k-ième tirage.

Exemples avec $n = 4$ et $p = 2$.

$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$

Issue 1

$\{2,4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$

Issue 2

L'issue 1 est sans *point fixe* tandis que l'issue 2 admet un *point fixe* (pour le tirage 2).

9. Soit l'évènement $\mathcal{F}_0$: « le résultat est sans point fixe ». Déterminer en fonction des entiers n et p la probabilité $P(\mathcal{F}_0)$.
10. Déterminer en fonction de p (fixé) la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\mathcal{F}_0)$.

Partie B. Tirages sans remise

Partie B-1. Formule d'inversion de Pascal

On établit dans cette question la formule $(\star)$ *d'inversion de Pascal.*
Soit $(n, k, j) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq j \leq k \leq n$.

11. Montrer qu'on a l'égalité
$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}.$$
12. Dans les cas $j = n$ puis $j < n$, calculer la somme ci-dessous :
$$\sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-j}{n-k}.$$
Indication. On pourra s'appuyer sur le changement d'indice $\ell = n - k$.
13. Soit f une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $g(k) = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f(j)$.

    Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(\star) \qquad f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k).$$

Partie B-2. Tirages simples

Étant donné un entier $n > 0$ on considère l'expérience aléatoire consitant en n tirages **successifs et sans remises** de boules de l'urne $\mathscr{U}_n$; une issue pour cette expérience aléatoire est donc une permutation de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ des entiers compris entre 1 et n. L'ensemble Ω des issues possibles est muni de la probabilité uniforme P.

Un *point fixe* pour une issue de l'expérience est un entier $k \leq n$ tel que la boule portant le numéro k apparaît en k-ième position. Une issue sans point fixe est appelée *dérangement*. On note d_n le nombre de dérangements parmi les permutations de $[\![1, n]\!]$. Par convention on pose $d_0 = 1$.

Exemples avec $n = 5$.

3	5	2	1	4

Issue 1

5	2	3	1	4

Issue 2

L'issue 1 est un dérangement, l'issue 2 ne l'est pas.

14. Énumérer les dérangements de $[\![1, n]\!]$ pour $n = 1, 2$ et 3 puis donner les valeurs de d_1, d_2 et d_3.
15. Fixons un entier $k > 0$. Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$ on considère l'évènement $\mathcal{F}_j$ regroupant l'ensemble des permutations de $[\![1, k]\!]$ ayant *exactement* j points fixes.
    (a) Exprimer le nombre $\operatorname{card} \mathcal{F}_j$ à l'aide des entiers d_{k-j} et $\binom{k}{j}$.
    (b) Que peut-on dire de la famille d'évènements $(\mathcal{F}_j)_{0 \leq j \leq k}$ relativement à l'univers Ω des permutations de $[\![1, k]\!]$? En déduire l'égalité :
    $$k! = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} d_j.$$
16. L'évènement $\mathcal{F}_0$ s'identifie à l'évènement « l'issue est un dérangement ». À l'aide d'un résultat de la partie B-1 conclure que la probabilité $P(\mathcal{F}_0)$ de l'évènement $\mathcal{F}_0$ est donnée par la formule :
    $$P(\mathcal{F}_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Partie B-3. Étude asymptotique

17. Établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'identité :
    $$\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t.$$
18. Établir l'encadrement suivant :
    $$0 \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^n e^t \mathrm{d}t \leq 1,$$
    puis en déduire la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\mathcal{F}_0)$.

SECOND PROBLÈME

Pour tout entier n strictement positif $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à coefficients réels de taille $n \times n$ et $\mathrm{G}\ell_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles. La matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est notée 0_n.

Le rang d'une matrice A est noté $\operatorname{rg} A$.

Définition. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice carrée $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente d'indice** p si

$$N^p = 0_n \text{ et } N^{p-1} \neq 0_n.$$

L'entier p est l'indice de nilpotence de la matrice N.

Partie I. Étude d'un exemple

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par l'expression :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y-z+t \\ -x+y+t \\ -x+y+t \\ y-z \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer à l'aide d'une méthode de pivot le rang de la matrice M et en déduire $\dim \operatorname{Ker} f$. Déterminer une base (v_1, v_2) de $\operatorname{Ker} f$.
3. Justifier que la matrice M est nilpotente ; préciser l'indice de nilpotence. Que peut-on en déduire pour les itérés $f \circ f \cdots \circ f$ de l'endomorphisme f ?

On considère les vecteurs $w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Justifier que la famille $\mathcal{B}'(w_1, w_2, w_3, w_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Pour $i \in [\![1, 4]\!]$, calculer $f(w_i)$ et en déduire la matrice G de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{G}\ell_4(\mathbb{R})$ telle que $G = P^{-1}MP$; expliciter les matrices P et P^{-1}.

Dans les parties qui suivent on revient au cas général.

Pour un endomorphisme φ d'un espace vectoriel E et un entier k on utilise la notation :

$$\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}$$

avec la convention $\varphi^0 = \mathrm{id}_E$.

Partie II. Sur le rang et l'indice

Dans les questions qui suivent $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne une matrice nilpotente d'indice p.

6. Montrer que $\operatorname{rg} N \leq n-1$.
7. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à N : c'est l'application linéaire qui à un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, identifié à une matrice unicolonne, associe le vecteur $\varphi(x) = N.x$.
   (a) Justifier l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi^{p-1}(x_0) \neq 0$.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, \varphi(x_0), \varphi^2(x_0), ..., \varphi^{p-1}(x_0))$ est libre puis en déduire l'inégalité $p \leq n$.

Partie III. Classification pour la relation de similitude des matrices nilpotentes cycliques

Définition. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est semblable à* une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ lorsqu'il existe $P \in \mathrm{G}\ell_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P.B.P^{-1}$$

8. Vérifier que la relation « *être semblable à* » définie une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Des* 1 *en-dessous de la diagonale, des* 0 *ailleurs.*

9. Montrer qu 'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice $p = n$ si et seulement si elle est semblable à la matrice J_n.

⋆ ⋆ ⋆

Fin du sujet