CONCOURS BLANC
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone portable est ***interdite****.*

⋆⋆⋆

Nota bene

- ◇ La qualité de la présentation et de la rédaction sera un élément déterminant dans la notation de la copie.
- ◇ Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

⋆⋆⋆

Ce sujet est composé de trois problèmes, indépendants les uns des autres, qui seront traités sur **trois copies distinctes les unes des autres** à rendre séparément.

Temps conseillés : problème 1, 1 heure 30 ; problème 2, 1 heure 30 ; problème 3, 1 heure.

⋆⋆⋆

Problème 1

Soient $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\begin{array}{rccl} f : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\cos x} \end{array}$

Dans la suite, on notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

Les trois parties de ce problème sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres.

Première partie : étude de f et de sa réciproque

1. Montrer que f est dérivable sur I, et calculer $f'(x)$, pour tout $x \in I$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
   On indiquera les limites éventuelles de f aux bornes de I.
3. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   En déduire une équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, et sa position par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de ce même point.
4. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera.

On notera g la réciproque de f.

5. Etudier les variations et la continuité de g.
6. Justifier que, pour tout $x \in J$, $\cos(g(x)) = \dfrac{1}{x}$ et $\sin(g(x)) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$.
7. Montrer que g est dérivable en tout point de $J \setminus \{1\}$, et que, pour tout $x \in J \setminus \{1\}$, $g'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
8. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de g à l'ordre 1.
9. Que peut-on dire de la représentation graphique de g au point d'abscisse 1 ?
10. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de g.

Deuxième partie : étude d'une suite définie par une relation de récurrence

11. Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{3}$.
12. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2}{3}|x - y|$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) - 1$.

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie, et que tous ses termes appartiennent à $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.
14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}\, u_n$.
15. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
16. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.

Troisième partie : étude d'une suite d'intégrales

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (f(x))^n\, dx$.

17. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
18. Calculer I_2.
19. (a) Déterminer les réels a et b vérifiant :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$

    (b) En effectuant le changement de variable $t = \sin x$, calculer I_1.
    On pourra utiliser le résultat de la question précédente.
20. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
21. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} I_n$.
22. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Problème 2

Etant donnés un espace vectoriel E, une partie A de E et un endomorphisme f de E, on dit que A est stable par f lorsque $f(A) \subset A$, autrement dit lorsque :

$$\forall \vec{x} \in A, \quad f(\vec{x}) \in A$$

> ▷ Les trois parties de ce problème sont consacrées à l'étude de cette notion de stabilité dans divers contextes.
> ▷ **Elles sont indépendantes les unes des autres.**

Première partie : un exemple dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+4y-4z, 2x+2y-z, 2x+3y-2z) \end{array}$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que φ est bijective.
3. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (b) Justifier que $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est stable par φ.
4. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x+y-z=0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de F.
   (b) Montrer que F est stable par φ.
   (c) Montrer que F et $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Deuxième partie : un exemple avec des fonctions polynomiales

Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus 2.

5. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   On considère l'application ψ définie sur E de la façon suivante : pour toute fonction $f \in E$, $\psi(f)$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ [\psi(f)](x) = (2x-1)f(x) - \left(x^2 - \tfrac{1}{2}\right) f'(x)$$

6. Montrer que ψ est un endomorphisme de E.
7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - 1$.
   Calculer $\psi(g)$, et en déduire que $\mathrm{Vect}(g)$ est stable par ψ.
8. On note $h_1 : x \mapsto x$ et $h_2 = \psi(h_1)$.
   (a) Calculer h_2, puis montrer $\psi(h_2)$ est une combinaison linéaire de h_1 et h_2.
   (b) Montrer que $\mathrm{Vect}(h_1, h_2)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par ψ.
9. Montrer que (g, h_1, h_2) est une base de E.

Troisième partie : un exemple dans un espace vectoriel « moins particulier »

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admettant une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Soit u l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\begin{cases} u(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 \\ u(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 \\ u(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{cases}$

10. Etant donné $\vec{x} \in E$, exprimer, en fonction des coordonnées de $\vec{x}$ dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, les coordonnées de $u(\vec{x})$ dans cette même base.

    On note $F = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

11. (a) Montrer que F est stable par u.
    (b) Montrer que, pour tout $\vec{x} \in F$, $u^2(\vec{x}) = -\vec{x}$.
    (c) Montrer que, pour tout $\vec{x} \in F \setminus \{\vec{0}\}$, $u(\vec{x})$ n'est pas proportionnel à $\vec{x}$.
    On pourra raisonner par l'absurde, et utiliser le résultat de la question précédente.
    (d) Montrer que, pour tout $\vec{x} \in E$, $u(\vec{x}) - 3\vec{x} \in F$.
12. (a) $\mathrm{Vect}(\vec{e}_3)$ est-il stable par u ?
    (b) Déterminer les réels λ et μ tels que le vecteur $\vec{e}_3{}' = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ vérifie : $u(\vec{e}_3{}') = 3\vec{e}_3{}'$.
    (c) Montrer que $\mathrm{Vect}(\vec{e}_3{}')$ est stable par u.
13. Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3{}')$ est une base de E.

Problème 3

Dans ce problème on désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées 3×3 à coefficients réels et on note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

> ▷ **La première partie ne dépend pas de la seconde.**
> ▷ **La seconde partie peut-être largement abordée sans les résultats de la première.**

Première partie : calcul matriciel

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Rappeler (sans justification) la dimension de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Vérifier que $M = I + P$ où P est une matrice 3×3 telle que $P^2 = P$.
3. On note $\mathscr{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I et P. Déterminer la dimension de $\mathscr{E}$ puis justifier que si $(A, B) \in \mathscr{E}^2$ alors $AB \in \mathscr{E}$. Peut-on en conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n \in \mathscr{E}$?
4. Montrer par récurrence que
$$\forall n \geq 1, \quad M^n = I + (2^n - 1)P.$$
L'égalité est-elle valable pour $n = 0$?
5. Justifier que M est inversible puis exprimer M^{-1} en fonction de I et P. **Indication** : on pourra commencer par calculer M^2 à l'aide de I et M.
6. Justifier que l'égalité $M^n = I + (2^n - 1)P$ est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Deuxième partie : de l'art d'organiser ses révisions

Un élève de PCSI organise ses révisions en mathématiques (M), physique (P) et chimie (C) pour le concours blanc de la manière suivante[1] :

- le jour 0 il révise les maths (M) ;
- si le jour n il révise une certaine matière (M, P ou C) alors le jour $n+1$ suivant : il choisit avec une probabilité $\frac{2}{3}$ de réviser la même discipline ou de passer à une autre avec une probabilité de $\frac{1}{6}$ pour l'une et l'autre des matières.

On fixe un nombre N de jours de révisions et on étudie pour $n \in [\![0, N]\!]$ les évènements suivants : M_n (resp. P_n, C_n) « l'élève révise M (resp. P, C) le jour n ». On note $m_n = P(M_n)$, $p_n = P(P_n)$ et $c_n = P(C_n)$ les probabilités de ces évènements. Le jour 0 nous avons donc $m_0 = 1$ et $p_0 = c_0 = 0$.

7. Que dire de la famille d'évènement (M_n, P_n, C_n) ? En déduire $m_n + p_n + c_n$.
8. À l'aide de la formule des probabilités totales montrer que pour $n \in [\![0, N-1]\!]$:
$$m_{n+1} = \frac{2}{3}m_n + \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}c_n.$$
Trouver de même une expression de p_{n+1} et c_{n+1} en fonction de m_n, p_n et c_n.
9. On pose $X_n = \begin{pmatrix} m_n \\ p_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'on ait la relation $X_{n+1} = AX_n$ puis en déduire que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $X_n = A^n\, X_0$.
10. Calculer A^n à l'aide des résultats de la partie 1.
11. Justifier que $m_N = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{N-1}}\right)$. Déterminer de même p_N et c_N.
12. Calculer les limites des ces quantités quand $N \to +\infty$.

1. Ce problème ne traite pas des révisions d'anglais, de français, d'informatique ou de sciences de l'ingénieur qui ne peuvent être laissées au hasard.