# CONCOURS BLANC : ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

*Corrigé*

## *Problème 1*

### Première partie : étude de $f$ et de sa réciproque

1. En tant qu'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas, $f$ est dérivable sur $I$, et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

2. ▷ On voit facilement que, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, et que $f'$ ne s'annule qu'en $0$ : $f$ est donc strictement croissante sur l'intervalle $I$.
   ▷ $f(0) = 1$ ;
   ▷ comme $\cos(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$, et puisque cos prend des valeurs positives sur $I$, $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} +\infty$.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ $+$ | $\Vert$ |
| $f(x)$ | $1$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

   La droite d'équation $y = 1$ est donc tangente à $\mathscr{C}_f$, et comme $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \leqslant 0$, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette droite, au voisinage du point d'abscisse 0 (... et même sur tout l'intervalle $I$, d'après l'étude effectuée dans la question précédente).

4. $f$ étant continue et strictement croissante, d'après le théorème de la bijection, $f$ réalise une bijection de $I$ sur $\left[f(0), \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\right[ = [1, +\infty[$.

5. D'après le théorème de la bijection, $g$ est strictement monotone, de même monotonie que $f$ (c'est-à-dire strictement croissante) et continue.

6. Par définition de $g$, pour tout $x \in J$, $f(g(x)) = x$, ce qui se réécrit : $\dfrac{1}{\cos(g(x))} = x$.

   Par conséquent, $\cos(g(x)) = \dfrac{1}{x}$.

   D'autre part, comme, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, en appliquant cette identité à $g(x)$, il vient, pour tout $x \in J$ : $\sin^2(g(x)) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

   Comme, de plus, pour tout $x \in J$, $g(x) \in I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(g(x)) \geqslant 0$, et on déduit de l'égalité précédente : $\sin(g(x)) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$.

7. Puisque $f$ est dérivable sur $I$, et comme $f'$ ne s'annule par sur $I \setminus \{0\}$, $g$ est dérivable en tout point de $J \setminus \{f(0)\} = J \setminus \{1\}$, et, pour tout $x > 1$, $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{\cos^2(g(x))}{\sin(g(x))} = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{x \times \left(x \times \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

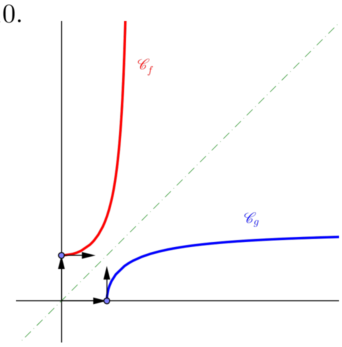
8. On vient de justifier, notamment, que $g$ est dérivable en $\sqrt{2}$, et que $g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   De plus, $g(\sqrt{2})$ est l'unique antécédent de $\sqrt{2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ par $f$ : on vérifie facilement que $\frac{\pi}{4}$ convient.

   On en déduit que $g$ admet un développement limité en $\sqrt{2}$, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\sqrt{2}) + g'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + \underset{x\to\sqrt{2}}{o}\left(x - \sqrt{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \underset{x\to\sqrt{2}}{o}\left(x - \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

9. Puisque $f'(0) = 0$, $g$ n'est pas dérivable en $f(0) = 1$, et sa représentation graphique admet, au point d'abscisse 1, une (demi-)tangente verticale.

10. 

Deuxième partie : étude d'une suite définie par une relation de récurrence

11. $f'$ étant un quotient de fonctions dérivables sur $I$ dont le dénominateur ne s'annule pas, $f'$ est dérivable sur $I$, et, pour tout $x \in I$, $f''(x) = \dfrac{\cos(x) \times \cos^2(x) - \sin(x) \times (-2\sin(x)\cos(x))}{\cos^4(x)} \geqslant 0$.

    $f'$ est donc croissante sur l'intervalle $I$, donc, pour tout $x \in I$, $\underbrace{f'(0)}_{=0} \leqslant f'(x) \leqslant \underbrace{f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{2}{3}}$.

12. Ainsi, $f$ est une fonction dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ vérifiant, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{2}{3}$.
    Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis, $f$ est $\frac{2}{3}$-lipschitzienne sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, c'est-à-dire que, pour tout $(x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2}{3}|x - y|$.

13. Raisonnons par récurrence, et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : *« le réel $u_n$ existe, et est compris entre $0$ et $\frac{\pi}{6}$ ».*
    ▷ $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse.
    ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
    D'après $\mathcal{P}(n)$, $u_n$ existe et $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{6}$.
    Ainsi, puisque, en particulier, $u_n \in I$, l'expression $f(u_n)$ est correctement définie : $u_{n+1}$ existe bel et bien.
    De plus, $f$ étant croissante, $f(0) \leqslant f(u_n)$, et donc $f(0) - 1 \leqslant f(u_n) - 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+1}$.
    En outre, d'après la réponse à la question 12, $|f(u_n) - f(0)| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 0|$, ce que l'on peut réécrire : $u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}u_n$.
    Enfin, comme $\frac{2}{3} < 1$, et puisque $u_n \geqslant 0$, $\frac{2}{3}u_n \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{6}$.
    Finalement, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{\pi}{6}$.
    $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
    D'après le principe de récurrence, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie, et tous ses termes sont compris entre $0$ et $\frac{\pi}{6}$.

14. Cette inégalité a été justifiée dans la preuve d'hérédité précédente : c'est une conséquence de la réponse à la question 12.

15. A nouveau, raisonnons par récurrence, et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
    ▷ Puisque $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{6} < 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
    ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
    D'après la réponse à la question précédente, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}u_n$.
    Or, d'après $\mathcal{P}(n)$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
    Ainsi, puisque $\frac{2}{3} > 0$, $\frac{2}{3}u_n \leqslant \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$
    Par conséquent, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
    $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
    Donc, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

16. Puisque $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

    On déduit alors de l'inégalité établie dans la question précédente que, d'après le théorème de convergence par encadrement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Troisième partie : étude d'une suite d'intégrales

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^n$ étant bien définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, l'intégrale $I_n$ est correctement définie.

18. Pour le calcul de $I_2$, on reconnaît la dérivée de tan : $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = [\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1$.

19. (a) En réduisant au même dénominateur les fractions du second membre, on voit facilement qu'il suffit d'avoir $a - b = 0$ et $a + b = 1$ pour que l'égalité souhaitée soit vérifiée : les réels cherchés sont donc $a = b = \frac{1}{2}$.

    (b) Si l'on pose $t = \sin(x)$, la fonction $x \mapsto \sin(x)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a alors $dt = \cos(x)\,dx$.

    On peut donc écrire : $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)\,dx}{\cos^2(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)\,dx}{1 - \sin^2(x)}$ si bien que l'intégrale $I_1$ se réécrit : $I_1 = \displaystyle\int_{\sin(0)}^{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{dt}{1 - t^2}$.

    On remarque que, pour tout $t$ compris entre $\sin 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $t \notin \{-1, 1\}$, si bien que l'égalité établie dans la question précédente peut s'appliquer... et nous permettre de calculer $I_1$ :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1+t}\right) = \frac{1}{2}\left([-\ln(1-t)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+t)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \underbrace{= \cdots\cdots\cdots\cdots =}_{\text{simplifications classiques}} \frac{\ln(3 + 2\sqrt{2})}{2} = \ln(1 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

20. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{\cos^{n+1}(x)} - \frac{1}{\cos^n(x)} \right) dx = \int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{\cos^{n+1}(x)} dx.$

Or, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $1 - \cos(x) \geqslant 0$, et $0 < \dfrac{1}{\cos^{n+1}(x)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ : $\dfrac{1-\cos(x)}{\cos^{n+1}(x)} \geqslant 0$.

Donc, par positivité de l'intégrale (les bornes étant écrites dans l' ordre croissant) : $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.

Par conséquent, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

21. Tout semble indiquer que, comme dans d'autres cas où il faut déterminer une relation de récurrence liant les termes successifs d'une suite d'intégrales, on doive effectuer une intégration par parties.

Puisqu'on connaît une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$, il est naturel de considérer les fonctions $u$ et $v$ suivantes, qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ :

$$\begin{array}{ll} u(x) = \dfrac{1}{\cos^n x} & u'(x) = n\dfrac{\sin x}{\cos^{n+1} x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} & v(x) = \tan x \end{array}$$

Alors $I_{n+2} = \left[ \dfrac{1}{\cos^n x} \times \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} \times \tan x \; dx.$

D'une part, $\left[ \dfrac{1}{\cos^n x} \times \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2})^n$, et d'autre part :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} \times \tan x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^{n+2} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{n+2} x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x} dx$$

On a donc $I_{n+2} = (\sqrt{2})^n - n(I_{n+2} - I_n)$, et finalement : $I_{n+2} = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} I_n$.

22. Puisque $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, d'après le théorème de la limite monotone, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ou admet $+\infty$ pour limite.

Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente, alors, en notant $\ell$ sa limite :

▷ comme $(I_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle convergerait également vers $\ell$ ;

▷ par produit de limites, on aurait : $\dfrac{n}{n+1} I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Par conséquent, la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ impliquerait : $I_{n+2} - \dfrac{n}{n+1} I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or, d'après la réponse à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} - \dfrac{n}{n+1} I_n = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1}$, donc, par croissances comparées, $I_{n+2} - \dfrac{n}{n+1} I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ces deux conclusions étant contradictoires, l'hypothèse « $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente* » est fausse.

D'après le début du raisonnement, on conclut que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

# *Problème 2*

Première partie : un exemple dans $\mathbb{R}^3$

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et pour tous $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{v} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= \varphi(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (3(\lambda x + \mu x') + 4(\lambda y + \mu y') - 4(\lambda z + \mu z'), 2(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z'), \\ &\qquad 2(\lambda x + \mu x') + 3(\lambda y + \mu y') - 2(\lambda z + \mu z')) \\ &= (\lambda(3x + 4y - 4z) + \mu(3x' + 4y' - 4z'), \lambda(2x + 2y - z) + \mu(2x' + 2y' - z'), \\ &\qquad \lambda(2x + 3y - 2z) + \mu(2x' + 3y' - 2z')) \\ &= \lambda(3x + 4y - 4z, 2x + 2y - z, 2x + 3y - 2z) + \mu(3x' + 4y' - 4z', 2x' + 2y' - z', 2x' + 3y' - 2z') \\ &= \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v}) \end{aligned}$$

$\varphi$ est donc une application linéaire, définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. i. *Injectivité*

   Montrons que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\vec{0}\}$.

   Considérons donc $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ : par conséquent, $\varphi(\vec{u}) = (0, 0, 0)$, ce qui s'écrit $\left\{\begin{array}{r} 3x + 4y - 4z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{array}\right.$

   La résolution de ce système donne :

$$\left\{\begin{array}{r} 3x + 4y - 4z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{array}\right. \iff \underset{\substack{(L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1)}}{\left\{\begin{array}{r} 3x + 4y - 4z = 0 \\ -2y + 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array}\right.} \iff \underset{(L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2)}{\left\{\begin{array}{r} 3x + 4y - 4z = 0 \\ -2y + 5z = 0 \\ 9z = 0 \end{array}\right.} \iff \left\{\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

   Ainsi, le seul vecteur présent dans le noyau de $\varphi$ est $(0, 0, 0)$, ce qui justifie que $\varphi$ est injective.

   ii. *Surjectivité*

   Soit $\vec{v} = (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ : montrons qu'il existe $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$.

   Cette égalité se réécrit $\left\{\begin{array}{r} 3x + 4y - 4z = X \\ 2x + 2y - z = Y \\ 2x + 3y - 2z = Z \end{array}\right.$ et on doit donc montrer que ce système, d'inconnues $x$, $y$ et $z$, admet au moins un triplet solution.

   En appliquant à ce système les mêmes opérations élémentaires sur les lignes que sur celui considéré dans l'étude du noyau, on montre facilement que ce système est compatible (et même de Cramer).

   On justifie ainsi que $\varphi$ est surjective.

   Par conséquent, $\varphi$ est bijective.

3. (a) Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \quad &\iff \quad \varphi(\vec{u}) - 3\vec{u} = \vec{0} \iff \left\{\begin{array}{r} 4y - 4z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rl} 2x - y - z = 0 & \\ 4y - 4z = 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 2x + 3y - 5z = 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rl} 2x - y - z = 0 & \\ 4y - 4z = 0 & \\ 4y - 4z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rl} 2x - y - z = 0 & \\ 4y - 4z = 0 & \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{r} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} 2x - y = z \\ y = z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x = z \\ y = z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

   Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{(z, z, z)\,;\, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$.

   $((1, 1, 1))$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, et puisqu'elle est formée d'un seul vecteur non nul, elle est libre : c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

   (b) Soit $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ : d'après ce qui précède, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda(1, 1, 1)$.

   Par conséquent, $\varphi(\vec{u}) = \lambda\varphi(1, 1, 1) = \lambda(3, 3, 3) = 3\lambda(1, 1, 1) \in \mathrm{Vect}((1, 1, 1)) = \mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

   On a ainsi montré que $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est stable par $\varphi$.

4. (a) Puisque $F = \{(x, y, z)\,;\, z = x + y\} = \{(x, y, x + y)\,;\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)\,;\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$, $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, dont $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est une famille génératrice. Comme cette famille est constituée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre : il s'agit donc d'une base de $F$.

   (b) Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in F$.

   Puisque $\varphi(\vec{u}) = (3x + 4y - 4z, 2x + 2y - z, 2x + 3y - 2z)$, il suffit d'observer que :

$$(3x + 4y - 4z) + (2x + 2y - z) - (2x + 3y - 2z) = 3x + 3y - 3z = \underbrace{3(x + y - z) = 0}_{\text{car } \vec{u} \in F}$$

   pour justifier que $\varphi(\vec{u}) \in F$.

   Par conséquent, $F$ est stable par $\varphi$.

(c) i. *Montrons que $F$ et $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont en somme directe*

Pour cela, considérons $\vec{u} \in F \cap \mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Puisque $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, d'après la question 3.(b), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda(1,1,1) = (\lambda, \lambda, \lambda)$.

D'autre part, comme $\vec{u} \in F$, il vient : $\lambda + \lambda - \lambda = 0$, donc $\lambda = 0$.

Finalement, $\vec{u} = \vec{0}$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cap F = \{\vec{0}\}$ : $F$ et $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont donc en somme directe.

ii. *Montrons que $F + \mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$*

Considérons $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, et montrons qu'il existe $\vec{u}_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\vec{u}_2 \in F$ tels que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

D'après ce qui a été vu en 3.(b) et en 4.(a), il s'agit donc de montrer qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u} = \lambda(1,1,1) + \mu(1,0,1) + \nu(0,1,1)$, autrement dit que le système $\begin{cases} \lambda + \mu \qquad = x \\ \lambda \qquad + \nu = y \\ \lambda + \mu + \nu = z \end{cases}$, d'inconnues $\lambda$, $\mu$ et $\nu$, admet au moins une solution.

Or, par des manipulations élémentaires sur les lignes, il vient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu \qquad = x \\ \lambda \qquad + \nu = y \\ \lambda + \mu + \nu = z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu & = & x \\ \quad -\mu + \nu & = & y - x \\ \qquad\quad \nu & = & z - x \end{cases}$$

On voit ainsi aisément que le système considéré est compatible, en d'autres termes que $\vec{u}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $((1,1,1),(1,0,1),(0,1,1))$, donc comme la somme d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et d'un vecteur de $F$.

On a ainsi montré que $F + \mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.

Finalement, $F$ et $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

## Deuxième partie : un exemple avec des fonctions polynomiales

5. On peut montrer que $E$ contient le vecteur nul (à savoir, ici, la fonction identiquement nulle) et est stable par combinaison linéaire... ou remarquer que, si on note, pour tout $i \in \{0,1,2\}$, $f_i : x \mapsto x^i$, on peut écrire $E = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$.

   $E$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   $E$ est donc, en tant que tel, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

6. i. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(g_1, g_2) \in E^2$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
[\psi(\lambda g_1 + \mu g_2)](x) &= (2x-1)(\lambda g_1 + \mu g_2)(x) - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(\lambda g_1 + \mu g_2)'(x) \\
&= (2x-1)(\lambda g_1 + \mu g_2)(x) - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(\lambda g_1' + \mu g_2')(x) \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= (2x-1)(\lambda g_1(x) + \mu g_2(x)) - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(\lambda g_1'(x) + \mu g_2'(x)) \\
&\qquad \text{par définition des opérations sur } \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\
&= \lambda\left((2x-1)g_1(x) - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)g_1'(x)\right) + \mu\left((2x-1)g_2(x) - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)g_2'(x)\right) \\
&= \lambda[\psi(g_1)](x) + \mu[\psi(g_2)](x) \\
&= [\lambda\psi(g_1) + \mu\psi(g_2)](x)
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\psi(\lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda\psi(g_1) + \mu\psi(g_2)$ : $\psi$ est donc une application linéaire.

   ii. Pour tout $f \in E$, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

   Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$[\psi(f)](x) = (2x-1)\left(ax^2 + bx + c\right) - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(2ax + b) = (-a+b)x^2 + (a - b + 2c)x + \left(\frac{b}{2} - c\right)$$

   Par conséquent, $\psi(f) \in E$.

   Finalement, $\psi$ est un endomorphisme de $E$.

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[\psi(g)](x) = (2x-1)(2x^2-1) - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \times 4x = -2x^2 + 1 = -g(x)$ : donc $\psi(g) = -g$.

   Par conséquent, pour toute fonction $f$ appartenant à $\mathrm{Vect}(g)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda g$, et donc :

$$\psi(f) = \psi(\lambda g) = \lambda\psi(g) = -\lambda g \in \mathrm{Vect}(g)$$

   $\mathrm{Vect}(g)$ est donc stable par $\psi$.

8. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_2(x) = (2x-1)x - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{2}$, et donc :

$$[\psi(h_2)](x) = (2x-1)\left(x^2 - x + \tfrac{1}{2}\right) - \left(x^2 - \tfrac{1}{2}\right)(2x-1) = -2x^2 + 3x - 1$$

On remarque alors que $\psi(h_2) = -2h_2 + h_1$, donc $\psi(h_2)$ est une combinaison linéaire de $h_1$ et $h_2$.

(b) Pour toute $f \in \mathrm{Vect}(h_1, h_2)$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \lambda h_1 + \mu h_2$.
Ainsi, par linéarité de $\psi$, et d'après le travail précédent, il vient :

$$\psi(f) = \lambda\psi(h_1) + \mu\psi(h_2) = \lambda h_2 + \mu(-2h_2 + h_1) = \mu h_1 + (\lambda - 2\mu)h_2$$

Par conséquent, $\psi(f) \in \mathrm{Vect}(h_1, h_2)$.
Finalement, $\mathrm{Vect}(h_1, h_2)$ est stable par $\psi$.

9. i. *Liberté*
Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda g + \mu h_1 + \nu h_2$ est identiquement nulle.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(2x^2 - 1) + \mu x + \nu\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = 0$.
Cette égalité étant valable pour tout réel $x$, elle l'est, en particulier, pour $x = 0$, pour $x = 1$ et pour $x = -1$, ce qui donne $\begin{cases} -\lambda \quad + \frac{\nu}{2} = 0 \\ \lambda + \mu + \frac{\nu}{2} = 0 \\ \lambda - \mu + \frac{5\nu}{2} = 0 \end{cases}$
Ce système se résout facilement, et on constate que $(0, 0, 0)$ en est l'unique solution, ce qui montre que la famille $(g, h_1, h_2)$ est libre.

ii. *Caractère générateur de $E$*
Soit $f \in E$ : il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Montrons qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda g + \mu h_1 + \nu h_2 = f$, c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\underbrace{\lambda(2x^2 - 1) + \mu x + \nu\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)}_{=(2\lambda+\nu)x^2 + (\mu-\nu)x + \left(-\lambda + \frac{\nu}{2}\right)} = ax^2 + bx + c$$

Pour que cette égalité soit vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit que $\begin{cases} 2\lambda \quad + \nu = a \\ \mu - \nu = b \\ -\lambda \quad + \frac{\nu}{2} = c \end{cases}$

On voit aisément que ce dernier système est équivalent à $\begin{cases} 2\lambda & +\nu & = & a \\ & \mu - \nu & = & b \\ & \nu & = & 2c + a \end{cases}$, qui est clairement compatible.
Ainsi, il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f = \lambda g + \mu h_1 + \nu h_2$.
Par conséquent, $(g, h_1, h_2)$ est une famille génératrice de $E$.

Finalement, $(g, h_1, h_2)$ est une base de $E$.

## Troisième partie : un exemple dans un espace vectoriel « moins particulier »

10. Les coordonnées de $\vec{x}$ dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont les scalaires $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ vérifiant $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$. Par linéarité de $f$, il vient :

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \lambda_1 u(\vec{e}_1) + \lambda_2 u(\vec{e}_2) + \lambda_3 u(\vec{e}_3) \\ &= \lambda_1\vec{e}_2 - \lambda_2\vec{e}_1 + \lambda_3(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) \\ &= (-\lambda_2 + \lambda_3)\vec{e}_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3)\vec{e}_2 + 3\lambda_3\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Par conséquent, les coordonnées de $u(\vec{x})$ dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont $(-\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_3, 3\lambda_3)$.

11. (a) Pour tout $\vec{x} \in F$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$, et donc $u(\vec{x}) = \lambda u(\vec{e}_1) + \mu u(\vec{e}_2) = \lambda\vec{e}_2 - \mu\vec{e}_1 \in F$.
Par conséquent, $F$ est stable par $u$.

(b) Pour tout $\vec{x} \in F$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$, et donc :

$$u^2(\vec{x}) = u(u(\vec{x})) = u(\lambda\vec{e}_2 - \mu\vec{e}_1) = \lambda u(\vec{e}_2) - \mu u(\vec{e}_1) = -\lambda\vec{e}_1 - \mu\vec{e}_2 = -\vec{x}$$

(c) Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un vecteur $\vec{x}$ de $F$, non nul, tel que $u(\vec{x})$ soit proportionnel à $\vec{x}$ : il existerait alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u^2(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
Or, d'après le résultat de la question précédente, on aurait également $u^2(\vec{x}) = -\vec{x}$, et donc $-\vec{x} = \lambda^2\vec{x}$. Puisque $\vec{x} \neq \vec{0}$, on pourrait alors en déduire que $\lambda^2 = -1$, ce qui est absurde, puisque $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'hypothèse *« il existe un vecteur $\vec{x}$ de $F$, non nul, tel que $u(\vec{x})$ soit proportionnel à $\vec{x}$ »* est donc fausse : pour tout $\vec{x} \in F \setminus \{\vec{0}\}$, $u(\vec{x})$ et $\vec{x}$ ne sont pas proportionnels.

(d) Pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$.
En reprenant le calcul effectué en 10, il vient alors :

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) - 3\vec{x} &= (-\lambda_2 + \lambda_3)\vec{e}_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3)\vec{e}_2 + 3\lambda_3\vec{e}_3 - 3(\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3) \\ &= (-3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\vec{e}_1 + (\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Par conséquent, $u(\vec{x}) - 3\vec{x} \in F$... et ce, pour tout $\vec{x} \in E$.

12. (a) Comme $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une famille libre, $u(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \notin \text{Vect}(\vec{e}_3)$, et donc $\text{Vect}(\vec{e}_3)$ n'est pas stable par $u$.

(b) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
$u(\lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = (1-\mu)\vec{e}_1 + (\lambda+2)\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.
Donc $u(\vec{e}_3{}') = 3\vec{e}_3{}'$ si et seulement si $(1-\mu)\vec{e}_1 + (\lambda+2)\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = 3\lambda\vec{e}_1 + 3\mu\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, ce qui se réécrit :

$$(1 - 3\lambda - \mu)\vec{e}_1 + (2 + \lambda - 3\mu)\vec{e}_2 = \vec{0}$$

Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre, cette égalité est équivalente à $\begin{cases} 3\lambda + \mu = 1 \\ \lambda - 3\mu = -2 \end{cases}$

Par conséquent, le vecteur $\vec{e}_3{}' = \frac{1}{10}\,\vec{e}_1 + \frac{7}{10}\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ vérifie $u(\vec{e}_3{}') = 3\vec{e}_3{}'$.

(c) Pour tout $\vec{x} \in \text{Vect}(\vec{e}_3{}')$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} = \alpha\vec{e}_3{}'$, et alors $u(\vec{x}) = \alpha u(\vec{e}_3{}') = 3\alpha\vec{e}_3{}' \in \text{Vect}(\vec{e}_3{}')$.
Ainsi, $\text{Vect}(\vec{e}_3{}')$ est stable par $u$.

13. i. *Liberté*
Soit $(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3{}' = \vec{0}$.
Par définition de $\vec{e}_3{}'$, cette égalité se réécrit : $\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{10}\right)\vec{e}_1 + \left(\lambda_2 + \frac{7\lambda_3}{10}\right)\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}$.
Comme $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est libre, on déduit de cette dernière égalité : $\begin{cases} \lambda_1 \quad + \frac{\lambda_3}{10} = 0 \\ \lambda_2 + \frac{7\lambda_3}{10} = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$
Il est alors facile de voir que ces égalités imposent $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
On a ainsi montré que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3{}')$ est libre.

ii. *Caractère générateur de E.*
Soit $\vec{x} \in E$.
Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $E$, il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{x} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 + \nu\vec{e}_3$.
Montrons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3{}'$.
D'après ce qui précède, une telle égalité se réécrit : $\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{10}\right)\vec{e}_1 + \left(\lambda_2 + \frac{7\lambda_3}{10}\right)\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 + \nu\vec{e}_3$ :
il suffit donc de montrer que le système $\begin{cases} \lambda_1 \quad + \frac{\lambda_3}{10} = \lambda \\ \lambda_2 + \frac{7\lambda_3}{10} = \mu \\ \lambda_3 = \nu \end{cases}$ d'inconnues $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$, admet au moins une solution : il est facile de vérifier que tel est le cas.
On justifie ainsi que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3{}')$ est une famille génératrice de $E$.

Finalement, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3{}')$ est une base de $E$.

## *Problème 3*

Première partie : calcul matriciel

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. $\boxed{\dim \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = 3^2 = 9}$.
2. On a $M = I + P$ avec $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie par un calcul que $P^2 = P$
3. On note $\mathscr{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $I$ et $P$. La famille $I$,$P$ est génératrice de $\mathscr{E}$ ; comme les matrices $I$ et $P$ ne sont pas linéairement liées, la famille est une base de $\mathscr{E}$. Ainsi $\dim \mathscr{E} = 2$.
Soit $(A, B) \in \mathscr{E}^2$. Posons $A = xI + yP$ et $B = x'I + y'P$ avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. Nous avons :
$$\boxed{AB = xx'I + (xy' + x'y + x'y')P \in \mathscr{E}}$$
Par une simple récurrence on peut en conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n \in \mathscr{E}$ (comme produit d'éléments de $\mathscr{E}$).
4. La formule est vraie, par définition, pour $n = 1$. Supposons là vraie pour un certain entier $n \geq 1$. Dans ce cas :
$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n.M \\ &= (I + (2^n - 1)P)(I + P) \\ &= I + (1 + (2^n - 1) + (2^n - 1))P \\ &= I + (2^{n+1} - 1)P \end{aligned}$$
La formule est donc héréditaire. Par principe de récurrence sur $n$, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $M^0 = I$ l'égalité est valable pour $n = 0$.

5. On vérifie que $M^2 = I + 3P = I + 3(M - I)$ donc $M^2 - 3M = -2I$ ainsi :
$$M\left(\frac{3I - M}{2}\right) = I$$
Cela justifie que $M$ est inversible à droite (donc aussi à gauche) puis que $M^{-1} = \dfrac{3I - M}{2}$. Nous avons donc :
$$\boxed{M^{-1} = I - \frac{1}{2}P}$$

6. Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I + (2^n - 1)P$. Par un simple calcul nous vérifons que :
$$M^n(I + (2^{-n} - 1)P) = (I + (2^n - 1)P)(I + (2^{-n} - 1)P) = I$$
En conclusion :
$$M^{-n} = M^{n^{-1}} = I + (2^{-n} - 1)P$$
Cela montre que l'égalité $M^n = I + (2^n - 1)P$ est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Deuxième partie : de l'art d'organiser ses révisions

7. La famille d'évènement $(M_n, P_n, C_n)$ est un système complet d'évènement. Nous avons donc
$$\boxed{m_n + p_n + c_n = P(M_n) + P(P_n) + P(C_n) = 1}$$

8. La formule des ***probabilités totales*** nous donne pour tout $n \in [\![0, N - 1]\!]$ :
$$P(M_{n+1}) = P(M_n)P(M_{n+1}|M_n) + P(P_n)P(M_{n+1}|P_n) + P(C_n)P(M_{n+1}|C_n)$$
On en déduit donc les relations :
$$\boxed{m_{n+1} = \frac{2}{3}m_n + \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}c_n}$$
De même :
$$\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{6}m_n + \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}c_n}$$
$$\boxed{c_{n+1} = \frac{1}{6}m_n + \frac{1}{6}p_n + \frac{2}{3}c_n}$$

9. On pose $X_n = \begin{pmatrix} m_n \\ p_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On vérifie la relation matricielle $X_{n+1} = AX_n$ en posant :
$$\boxed{A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$$
On vérifie enfin par une simple **récurrence** que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $X_n = A^n\, X_0$.

10. On a la relation $A = \dfrac{1}{2}M$. On obtient donc avec les résultats de la partie 2 :
$$\boxed{A^n = \frac{M^n}{2^n} = \frac{I + (2^n - 1)P}{2^n}}$$

11. La relation matricielle :
$$\begin{pmatrix} m_N \\ p_N \\ c_N \end{pmatrix} = A^N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
nous permet d'écrire :
$$\boxed{\begin{cases} m_N &= \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{N-1}}\right) \\ p_N &= \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^N}\right) \\ c_N &= \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^N}\right) \end{cases}}$$

12. On vérifie sans difficulté que :
$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} m_N = \lim_{N \to +\infty} p_N = \lim_{N \to +\infty} c_N = \frac{1}{3}}$$