Devoir Maison 8

à rendre le jeudi 23 janvier 2014

Vous attacherez un soin particulier à ***la rédaction*** *et à* ***la clarté du raisonnement*** *ainsi qu'à* ***la présentation*** *de la copie. Vos résultats devront être mis en évidence : encadrez-les ou soulignez-les avec une règle !*

Exercice. Sommes géométriques de racines de l'unité

On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et pour tout entier $N \geq 1$, par $\mathbb{U}_N$ l'ensemble des racines N-ièmes de l'unité.

Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la somme

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

1. Donner sous forme trigonométrique (exponentielle) les éléments de $\mathbb{U}_N$.

On suppose désormais que $n \geq 2$.

2. Calculer $S_n(1)$.
3. Soit $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$. Calculer $S_n(z)$.
4. On se propose de déterminer l'ensemble noté $\mathcal{S}_1$ des $z \in \mathbb{U}$ tels que $|S_n(z)| = 1$.
   (a) Montrer que $\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\} \subset \mathcal{S}_1$.
   (b) Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $|S_n(z)| = 1$. Justifier l'égalité $|z^n - 1| = |z - 1|$ puis en déduire que
   $$z^n + \bar{z}^n = z + \bar{z}$$
   (c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_1$.

Problème. Autour du lemme de l'escalier

Les parties II et III peuvent être traitées en admettant les résultats vus dans la partie I.
Si x est un réel strictement positif, on note pour tout entier $n \geq 1$, $\sqrt[n]{x}$ l'unique racine n-ième positive de x.

Partie I. Le résultat principal.

Un escalier se balaie en commençant par le haut. Proverbe roumain.

L'objectif de cette partie est de démontrer et d'étudier la proposition suivante :

Lemme de l'escalier. Étant donné une suite de réels $(u_n)_n$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\text{si } \lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

1. **Un exemple.** Soit la suite $(a_n)_n$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \ln(n)$.
   (a) La suite $(a_n)_n$ est-elle convergente ? Calculer $\lim_{n \to +\infty} (a_{n+1} - a_n)$.
   (b) Donner $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n}$.
2. Dans cette question on considère une suite $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$.
   (a) Écrire la définition **avec quantificateurs** de $\lim_{n \to +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$,

$$|v_n - v_{n_0}| < (n - n_0)\frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) En déduire que pour tout $n > n_0$,

$$\frac{|v_n|}{n} < \left(\frac{n-n_0}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{|v_{n_0}|}{n}.$$

(d) Justifier qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $\dfrac{|v_{n_0}|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(e) Conclure avec soins que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n} = 0$.

3. Soit une suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$.
En considérant la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - n\ell$ montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

4. En considérant la suite $(b_n)_n$ définie pour $n \geq 0$, par $b_n = (-1)^n$ montrer que la réciproque du lemme étudié est fausse *i.e.* : $(b_n)_n$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{n} = \ell$ et $(b_{n+1} - b_n)_n$ ne converge pas vers ℓ, avec ℓ à préciser.

Partie II. De l'utilisation convenable d'un escalier.

« Dans votre maison, vous pouvez faire des chutes partout où il y a des escaliers ». Société canadienne d'hypothèques et de logement.

Dans cette partie on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \text{ et } u_0 > 0.$$

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. *Indication : procéder en raisonnant par l'absurde.*
7. Calculer u_{n+1}^3 en fonction de u_n puis en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_{n+1}^3 - u_n^3\right) = 3$$

8. En déduire l'équivalent suivant :

$$u_n \sim \sqrt[3]{3n}.$$

Partie III. L'escalier multiplicatif.

« Votre escalier vous appartient : personnalisez-le ! ». Une célèbre chaine de magasins de bricolage.

9. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\dfrac{r_{n+1}}{r_n}\right)_n$ converge vers $\ell > 0$.
Déterminer la limite de la suite $\left(\sqrt[n]{r_n}\right)_n$.
10. Étant donné $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq k$, rappeler la définition du coefficient binomial $\dbinom{n}{k}$.
11. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $s_n = \dbinom{2n}{n}$.
Justifier que la suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_n$ converge et déterminer sa limite.
12. En déduire la limite ci-dessous :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$$