Devoir à la maison n°1 :

Partie I – étude de quelques propriétés de la fonction *f* définie par : $f(x) = Arc\sin(\sqrt{x})$

Pour répondre aux questions qui suivent, vous pouvez (et devez) utiliser toutes les propriétés des fonctions arcsinus et arccosinus vues en PCSI

I.1 Justifier que le domaine de définition de *f* est $[0,1]$.

I.2 Justifier que *f* est dérivable sur $]0,1[$ et calculer $f'(x)$.

I.3 *On se propose d'étudier la dérivabilité de f en* 0.

I.3.1 Montrer que, lorsque x tend vers 0, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

I.3.2 *f* est-elle dérivable en 0 ?

I.4 *On va maintenant étudier la dérivabilité de f en* 1.

I.4.1 Soit φ la fonction définie sur $[-1,1]$ par : $\varphi(x) = Arc\sin x + Arc\cos x$. En dérivant φ sur $]-1,1[$, prouver que : $Arc\sin x + Arc\cos x = \pi/2$, $\forall x \in [-1,1]$

I.4.2 Soit x un réel appartenant à $[-1,1]$. On pose $\theta = Arc\cos x$.

On rappelle que : $\theta = Arc\cos x \Leftrightarrow \cos\theta = x$ *et* $\theta \in [0,\pi]$

Justifier que, lorsque x tend vers 1, on a : $\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \circ(\theta^3)$

En déduire que, lorsque x tend vers 1, $Arc\cos x \sim \sqrt{2(1-x)}$.

I.4.3 Utiliser les questions **I.4.1** et **I.4.2** pour prouver que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$. Quelle conclusion en tirez-vous ?

I.5 Dresser le tableau de variations de f et dessiner son graphe. *N'oubliez pas de faire apparaître dans le dessin les résultats obtenus en **I.3.2** et **I.4.3**.*

Partie II – résolution de l'équation différentielle (E) : $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$**, avec** $x \in]0,1[$

II.1 *On commence par résoudre l'équation homogène (H) :* $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 0$

II.1.1 Vérifier l'égalité $\dfrac{2x-1}{2x(1-x)} = \dfrac{1}{2(1-x)} - \dfrac{1}{2x}$**.**

II.1.2 Montrer que la solution générale de (H) est : $y_H(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x(1-x)}}$, où C est une constante réelle.

II.2 *On résout (E) sur* $]0,1[$

II.2.1 En utilisant la méthode de variation de la constante et la question **I.2**, calculer une solution particulière y_P de (E).

II.2.2 Écrire l'expression de la solution générale de (E).

II.3 Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} y_P(x)=1$. *On peut donc prolonger par continuité la fonction* y_P *sur* $[0,1[$ *en posant* $y_P(0)=1$.

II.4 *On examine maintenant si* y_p *est dérivable en* 0.

II.4.1 En utilisant les développements limités en 0 de $Arc\sin x$ et $\sqrt{1-x}$ (à quel ordre ? c'est vous qui voyez), montrer que $Arc\sin\left(\sqrt{x}\right)-\sqrt{x(1-x)} \sim \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$

II.4.2 En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y_P(x)-y_P(0)}{x}=\dfrac{2}{3}$. Conclusion ?

II.5 La fonction y_P a été obtenue au **II.2.1** comme solution particulière de (E) sur $]0,1[$. Justifier par des explications pertinentes et convaincantes que cette fonction prolongée en 0 au **II.3** est solution de (E) sur $[0,1[$.

Partie III – étude des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_{n+1}=f(u_n)$

III.1 Étudier la suite (u_n) lorsque $u_0=0$. *On suppose dorénavant* $u_0>0$.

III.2 *Étude d'une fonction auxiliaire g définie par :* $g(x)=f(x)-x$

III.2.1 On pose $h(x)=x(1-x)$. Montrer que $h(x)<\dfrac{1}{4}$, $\forall x\in\left[0,\tfrac{1}{2}\right[\cup\left]\tfrac{1}{2},1\right]$.

III.2.2 En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement positive sur $]0,1]$.

III.3 *Un beau raisonnement par l'absurde*

III.3.1 En utilisant **III.2.2**, montrer que, tant que les termes u_n restent dans $]0,1]$, on a $u_{n+1}-u_n>0$.

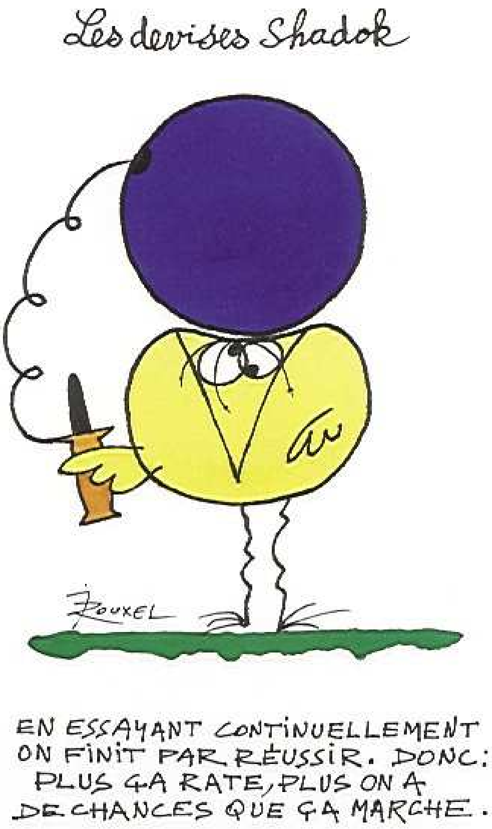
III.3.2 Montrer que, si tous les termes u_n sont dans $]0,1]$, (u_n) converge.

III.3.3 Justifier que, si (u_n) converge, sa limite ℓ vérifie $g(\ell)=0$. En déduire que la convergence de (u_n) est impossible.

III.3.4 Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0}>1$. Qu'en déduisez-vous sur u_{n_0+1} ?

III.4 Dessiner dans un même repère le graphe de f et la droite d'équation $y=x$. On choisit $u_0=0{,}1$. Calculer et dessiner les termes successifs de la suite jusqu'à dépasser 1. Et après ?

Partie IV pour les 5/2 – calcul d'une solution de (E) développable en série entière



On cherche une solution particulière y_Q *de (E) sous la forme :* $y_Q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *.On note R le rayon de convergence de cette série entière.*

IV.1 Démontrer par un calcul **soigneux** que y_Q est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2/3 \text{ et, pour tout } n \geq 1,\ a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1}$$

IV.2 Vérifier que : $\forall n \geq 0,\ a_n = \dfrac{2^{2n}.(n!)^2}{(2n+1)!}$

IV.3 Calculer R. En déduire que y_Q est solution de (E) sur $[0,1[$.

IV.4 En utilisant **II.2.2**, prouver que l'équation (E) a une seule solution prolongeable par continuité en 0. En déduire que $y_P = y_Q$.