VARIABLES ALEATOIRES DISCRÈTES

Loi, espérance, variance, série génératrice :

Ex1 : Soit $n \geq 2$. On tire deux boules dans une urne contenant *n* boules numérotées de 1 à *n*.
X est la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros tirés.

Partie I : le tirage est fait ***sans*** remise.

1) Définir l'univers Ω des résultats possibles et donner $Card(\Omega)$.

2) Pour tout entier *k* compris entre 1 et *n*, calculer $P(X = k)$.

3) Calculer l'espérance de *X*.

Partie II : le tirage est fait ***avec*** remise.

1) Définir l'univers Ω des résultats possibles et donner $Card(\Omega)$.

2) Pour tout entier *k* compris entre 1 et *n*, calculer $P(X \leq k)$. En déduire $P(X = k)$.

3) Calculer l'espérance de *X*.

Ex2 : *X* est une fonction de Ω dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$

Vérifier que *X* est une variable aléatoire, mais que *X* n'a pas d'espérance.

Ex3 : On lance deux dés. *X*, *Y* et *S* sont trois variables aléatoires qui donnent respectivement le chiffre obtenu avec le 1° dé, le chiffre obtenu avec le 2° dé et la somme des deux chiffres. On suppose que *X* et *Y* sont indépendantes.

1) Écrire les fonctions génératrices de *X* et *Y*. En déduire la fonction génératrice de *S*.

2) Calculer l'espérance et la variance de *S*.

Ex4 : *X* et *Y* sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi définie par :

$\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\},\ P(X = k) = \lambda . 2^k$, où λ est une constante réelle.

1) Déterminer la valeur de λ.

2) Prouver que : $P(X + Y = n) = (n+1)\dfrac{2^n}{(2^{n+1} - 1)^2}$

3) Calculer de manière analogue $P(X + Y = n+1)$, puis $P(|X - Y| = 1)$.

Ex5 : Un sac contient *n* jetons numérotées de 1 à *n* ($n \geq 3$) et on prélève 3 jetons simultanément.
X est la variable aléatoire égale au plus grand des numéros lus sur les trois jetons.
Y est la variable aléatoire égale au plus petit numéro.
Z est la variable aléatoire égale au numéro intermédiaire.

1) Établir les lois de *X*, *Y* et *Z*.

2) Démontrer par récurrence sur n l'égalité : $\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}=\binom{n+1}{4}$.

3) Calculer l'espérance de X.

Ex6 : n est un entier strictement positif, p est un réel appartenant à $]0,1[$ et $q=1-p$.

1) Calculer $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i q^{n-i}$ et $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}p^i q^{n-i}$.

2) Vérifier que : $\forall i\in[0,n]$, $\binom{n}{i}=\frac{i+1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$

3) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

Lois de Bernoulli et lois binomiales :

Ex7 : U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ définies sur le même univers Ω.

Écrire les lois marginales et la loi conjointe du couple (V,W), où $V=U_1+U_2$ et $W=U_1U_2$. Calculer la covariance et le coefficient de corrélation de (V,W).

Ex8 : Une fourmi se déplace sur un axe horizontal muni d'un repère orienté vers la droite. À l'instant initial $t=0$, elle est à l'origine du repère. Ensuite, elle va se déplacer sur l'axe en occupant uniquement des points à coordonnées entières selon la règle suivante : entre l'instant $t=n$ et l'instant $t=n+1$, elle a une probabilité p de se déplacer vers la droite et une probabilité $q=1-p$ de se déplacer vers la gauche.

Pour tout entier $n\geq 0$, on note :

- D_n la variable aléatoire qui compte le nombre de déplacements vers la droite que la fourmi a effectués entre les instants $t=0$ et $t=n$;

- G_n la variable aléatoire qui compte le nombre de déplacements vers la gauche que la fourmi a effectués entre les instants $t=0$ et $t=n$.

1) Identifier les lois de D_n et G_n.

2) a) X_n est la variable aléatoire qui donne l'abscisse du point où se trouve la fourmi à l'instant $t=n$. Exprimer X_n en fonction de D_n et G_n. En déduire l'espérance de X_n.

b) Déterminer toutes les valeurs que peut prendre X_n, puis calculer la loi de X_n.

Ex9 : Invités au festival de Tapiocapolis, les n membres du groupe des « Joyeux Turlurons » ont, pour loger, le choix (équiprobable) entre 3 hôtels : H_1, H_2 et H_3.

1) Pour $i\in\{1,2,3\}$, X_i est la variable qui donne le nombre de membres ayant choisi H_i. Identifier la loi de X_i. En déduire successivement $E(X_i)$ et $V(X_i)$.

2) Soient $i\in\{1,2,3\}$ et $j\in\{1,2,3\}$, avec $i\neq j$. Calculer la loi, l'espérance et la variance de X_i+X_j. En déduire le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_i,X_j)$.

Lois géométriques (et lois associées) :

Ex10 : Soient $a \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \geq k+1) = a.P(X \geq k)$$

Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(X = k+1) = a.P(X = k)$

En déduire que X suit une loi géométrique.

$\boxed{\textbf{Ex11}}$ **:** p et q sont deux réels appartenant à $]0,1[$ et vérifiant $p + q = 1$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $W = X + Y$, où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$.

Ex12 : X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{G}(a)$ et $\mathcal{G}(b)$, où $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

1) Écrire $P(X = Y)$ sous forme d'une sommation prenant en compte toutes les valeurs prises par X et Y. En déduire le résultat : $P(X = Y) = \dfrac{ab}{a+b-ab}$

2) On rappelle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(Y \geq k) = (1-b)^{k-1}$. Calculer $P(X \leq Y)$.

$\boxed{\textbf{Ex13}}$ **:** On répète indéfiniment une expérience dont la probabilité de succès est $p \in]0,1[$. On note X_1 la variable aléatoire qui donne le rang du premier succès. Rappeler la loi de X_1.

On note X_2 la variable aléatoire qui donne le rang du deuxième succès. Calculer, pour tout entier $k \geq 1$, la loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1 = k)$. En déduire la loi de X_2.

Ex14 : p et q sont deux réels appartenant à $]0,1[$ et vérifiant $p + q = 1$.

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ P(X = n) = P(Y = n) = p.q^n$. On considère $V = Min(X,Y)$ et $W = X - Y$.

1) On veut calculer la loi conjointe de (V,W). Pour cela, étant donnés deux entiers k et ℓ, on pose $p_{k\ell} = P((V = k) \cap (W = \ell))$.

a) On suppose $\ell \geq 0$. En remarquant qu'alors $V = Y$, prouver que $p_{k\ell} = p^2 q^{2k+\ell}$.

b) Calculer de manière analogue $p_{k\ell}$ pour $\ell < 0$.

2) Déduire de la loi conjointe de (V,W) les lois de V et W.

3) Vérifier que V et W sont indépendantes.

Ex15 : On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes ayant même probabilité de succès p $(0 < p < 1)$. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires à l'obtention d'un premier succès.

Pour $n > 0$, on considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$ ayant même loi que X. On note $M_n = min(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Pour $k > 0$, calculer $P(M_n \geq k)$.

- <u>Application 1</u> : déterminer la loi de M_n.
- <u>Application 2</u> : calculer l'espérance de M_n.

Ex16 : Une urne contient trois boules: une bleue, une rouge, une blanche. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne. On tire une deuxième boule : si elle est d'une couleur différente, l'expérience s'arrête; sinon, on la remet dans l'urne et on tire une troisième boule, etc. L'expérience s'arrête au $k^{\text{ième}}$ tirage si les $k-1$ premières boules tirées sont de la même couleur que la première et si la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est d'une couleur différente.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de tirages de l'expérience.

1) Préciser $X(\Omega)$, calculer la loi de X et vérifier que $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k)=1$. Qu'en déduisez-vous ?

2) Prouver que $Y = X-1$ suit une loi géométrique. En déduire rapidement $E(X)$ et $V(X)$.

Ex17 : On répète indéfiniment une expérience dont la probabilité de succès est $p \in \left]0,1\right[$. Pour $r>0$ fixé, on note S_r la variable aléatoire qui donne le nombre minimum de répétitions au bout duquel on a obtenu exactement r succès.

1) Identifier la loi de S_1. Donner sa fonction génératrice $G(t)$.

2) Pour tout entier $r \geq 2$, on pose $X_r = S_r - S_{r-1}$. Justifier que X_r est une variable aléatoire qui a même loi que S_1. On admet que les variables de la famille $(X_r, r\geq 2)$ sont mutuellement indépendantes. En déduire que la fonction génératrice de S_r est $H_r(t) = (G(t))^r$.

3) Calculer l'espérance de S_r.

4) Calculer le développement en série entière de $H_r(t)$. En déduire la formule suivante :

$$\forall n \in [r,+\infty), \quad P(S_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$$

Lois de Poisson :

Ex18 : Calculer la variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.

Ex19 : X est une variable aléatoire de loi $\mathscr{P}(\lambda)$.

1) Vérifier l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n$, $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{n!} \cdot \dfrac{1}{(n+1)^{k-n}}$

En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \leq \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{n+1}}$

2) En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, $P(X \geq n) \sim P(X=n)$.

Ex20 : Castor et Pollux ont écrit un petit programme Python qui leur fournit aléatoirement un entier naturel $X = n$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$.

Si n est impair, Castor a gagné et Pollux lui donne n euros. Si n est pair et non nul, Pollux a gagné et Castor lui donne n euros. Si $n = 0$, la manche est nulle.

1) On note ℓ la probabilité que Castor gagne et p la probabilité que Pollux gagne. Calculer successivement $\ell + p$ et $\ell - p$. En déduire ℓ et p.

2) Calculer l'espérance de gain de Castor.

Couples de variables aléatoires :

Ex21 : X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[1,n]$.

On pose $M = max(X_1, X_2)$ et $N = min(X_1, X_2)$.

1) Pour tout $k \in [1,n]$, calculer $P(M \leq k)$ et $P(N \geq k)$. En déduire les lois de M et N.

2) Vérifier que, pour tout couple (i, j) appartenant à $[1,n] \times [1,n]$, on a :

si $i > j$, $P((M = i) \cap (N = j)) = 2/n^2$ et, si $i = j$, $P((M = i) \cap (N = i)) = 1/n^2$

3) M et N sont-elles indépendantes ?

4) On pose $D = |X_1 - X_2|$.

a) Justifier que $D = M - N$ et que $D(\Omega) = \{0,1,...,n-1\}$

b) Pour $1 \leq k \leq n-1$, expliquer la formule : $P(D = k) = \sum_{i=1}^{n-k} P((M = k+i) \cap (N = i))$

En déduire une expression simple pour $P(D = k)$.

c) Calculer $P(D = 0)$, puis vérifier que $\sum_{k=0}^{n-1} P(D = k) = 1$

Ex22 : Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y le numéro du second jeton tiré.

1) Dresser le tableau de la loi conjointe de X et Y.

2) Calculer les lois marginales de X et de Y. Que remarquez-vous ?

3) Vérifier que X et Y ne sont pas indépendantes.

4) On se propose maintenant de calculer $E(XY)$.

a) Exprimer $E(XY)$ en fonction de $S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} i.j$, qu'on peut écrire aussi : $S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} i.j \right)$

b) Montrer que $S = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) . \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) - \sum_{i=1}^{n} i^2$

c) Calculer S et en déduire $E(XY)$.

5) Calculer $Cov(X,Y)$ et $\rho(X,Y)$.

Ex23 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω,T,P) et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \ P((X=i)\cap(Y=j))=\frac{1}{e\,2^{i+1}j!}$$

1) Déterminer les lois de X et de Y.

2) Vérifier que $1+X$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance et la variance de X.

3) Identifier la loi de Y. Donner son espérance et sa variance.

4) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

5) Calculer $P(X=Y)$ et $P(X\geq Y)$.

Familles de variables aléatoires :

$\boxed{\textbf{Ex24}}$ **:** Avant les 10 km. du canal, n concurrents portant les dossards 1 à n déposent leur portable à la consigne tenue par des bénévoles. Ils ne sont pas très rapides, donc ils finissent la course à la nuit tombée et la consigne est déserte et sombre. Alors ils récupèrent un portable au hasard.

On suppose $n\geq 2$. Pour $1\leq i\leq n$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le $i^{\text{ème}}$ concurrent récupère son portable et 0 sinon.

1) Identifier la loi de X_i, et donner $E(X_i)$ et $V(X_i)$.

2) Soient i et j deux indices différents compris entre 1 et n. Calculer $P(X_i=1/X_j=1)$, en déduire $P(X_iX_j=1)$, puis donner $E(X_iX_j)$ et $Cov(X_i,X_j)$.

3) Que mesure $X=X_1+X_2+\ldots X_n$? Calculer son espérance et sa variance.

Ex25 : $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, où $0<p<1$.

Pour $n\geq 1$, on pose $Y_n=X_n+X_{n+1}$ et $T_n=\dfrac{Y_1+Y_2+\ldots+Y_n}{n}$.

1) Calculer successivement $Cov(Y_n,Y_{n+1})$, Calculer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.

2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, démontrer que :

$$\text{pour tout } \varepsilon>0,\ \ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|T_n-2p\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

Ex26 : Dans un bassin d'aquaculture contenant n poissons, Jonas pêche un poisson par jour pendant n jours. Mais il ne les mange pas, il se contente à chaque fois de marquer le poisson pêché et le relâche ensuite. De ce fait, il arrive qu'il pêche un poisson déjà marqué. Pour $1\leq i\leq n$, X_i est la variable qui vaut 1 si le $i°$ poisson a été marqué à l'issue des n jours de pêche, et 0 sinon. S_n est la variable qui compte le nombre total de poissons marqués.

1) Exprimer S_n en fonction de $X_1,\ldots,X_n$. En déduire l'espérance de S_n.

2) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(S_n)}{n}=1-\frac{1}{e}$