VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

Exercices théoriques : (E est un K-espace vectoriel, avec K=$\mathbb{R}$ ou K=$\mathbb{C}$)

Ex1 : Soient f un endomorphisme bijectif de E et λ une valeur propre de f.

Justifier que $\lambda \neq 0$, puis montrer que $1/\lambda$ est valeur propre de f^{-1}.

Ex2 : Soient f un endomorphisme de E et D une droite de vecteur directeur u.

Montrer que : u est vecteur propre de $f \Leftrightarrow D$ est stable par f

Ex3 : Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

1) Démontrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.

2) Démontrer que, si λ est une valeur propre simple de f et si u_0 est un vecteur propre de f associé à λ, alors u_0 est aussi un vecteur propre de g (mais pas forcément associé à λ !).

Ex4 : Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, où E est un espace de dimension finie.

On suppose que f est diagonalisable et que tout sous-espace propre de f est stable par g.

Démontrer que $f \circ g = g \circ f$.

Ex5 : On suppose que E est de dimension n et qu'il est muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1, e_2, ..., e_n)$.

Soient f et g deux endomorphismes de E de matrices respectives A et B dans $\mathcal{B}$.

Calculer les deux produits suivants de matrices définies par blocs, où $x \in \mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} O_n & I_n \\ xI_n & -A \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & I_n \\ xI_n & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A & I_n \\ xI_n & B \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ xI_n & -A \end{pmatrix}$$

En déduire que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Ex6 : E est un espace de dimension finie et u est un endomorphisme qui vérifie $u^3 = -u$.

1) Montrer que $Im(u^2 + Id) \subset Ker(u)$. En déduire que $E = Ker(u) \oplus Ker(u^2 + Id)$.

2) Prouver que toute valeur propre λ de u vérifie $\lambda^3 = -\lambda$. Quelles sont donc les valeurs propres possibles de u si $K = \mathbb{R}$? si $K = \mathbb{C}$?

3) Dorénavant E est un espace vectoriel réel de dimension 3.

Soit P un polynôme à coefficients réels. Si α est une racine complexe non réelle d'ordre m de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine d'ordre m de P.

Conséquence : tout polynôme P à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

a) Justifier que 0 est valeur propre de u.

b) Si u n'est pas l'endomorphisme nul, montrer que :

$$dim(Ker u) \geq 1 \quad \text{et} \quad dim(Ker(u^2 + Id)) \geq 1$$

c) Soient x_0 et x_1 deux vecteurs non nuls appartenant respectivement à $Ker(u)$ et $Ker(u^2+Id)$. Prouver que $\mathscr{B}=(x_0,x_1,u(x_1))$ est une base de E adaptée à la décomposition $E=Ker(u)\oplus Ker(u^2+Id)$. Donner la matrice de u dans $\mathscr{B}$.

Ex7 : Soit f un endomorphisme diagonalisable de E dont le spectre est $\{1,-2\}$. On rappelle (cf. critère n°1) que $E=E_1(f)\oplus E_{-2}(f)$.

En déduire que $(f-Id_E)\circ(f+2Id_E)$ est l'endomorphisme nul.

$\boxed{\textbf{Ex8}}$ **:** Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2-3f+2Id_E=0$

1) Démontrer que, si u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors, pour tout entier naturel n, u est aussi un vecteur propre de f^n associé à la valeur propre λ^n.

2) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie l'équation $\lambda^2-3\lambda+2=0$.

3) Démontrer que f est diagonalisable si et seulement si $E=E_1(f)\oplus E_2(f)$.

Ex9 : Soit A une matrice carrée réelle d'ordre 2 telle que $det(A)<0$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Ex10 : Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes d'une matrice A.

Démontrer que : $Ker(A-\lambda I_n)\subset Im(A-\mu I_n)$

Ex11 : Soit M une matrice à coefficients complexes d'ordre n et de rang 1.

1) Prouver que 0 est valeur propre de M de multiplicité au moins égale à $n-1$. En déduire que $\chi_M(X)=X^{n-1}(X-\lambda)$, où $\lambda\in\mathbb{C}$.

2) Démontrer que M est diagonalisable si et seulement si $\lambda\neq 0$.

Ex12 : On considère deux projections p et q telles que $p\circ q=q\circ p$. On pose $f=p+q$.

On suppose que $Im\,p$, $Ker\,p$, $Im\,q$ et $Ker\,q$ sont des sous-espaces de E différents de $\{0_E\}$ et E.

1) Rappeler la raison pour laquelle $Sp(p)=Sp(q)=\{0,1\}$.

2) Prouver que, si $Ker\,p\cap Ker\,q\neq\{0_E\}$, 0 est valeur propre de f.

3) Soit λ une valeur propre non nulle de f et x un vecteur propre de f associé à λ.

a) Justifier que l'un au moins des deux vecteurs $p(x)$ ou $q(x)$ est non nul.

b) Établir que $(\lambda-1)p(x)=(\lambda-1)q(x)$.

c) En déduire que $\lambda=1$ ou $\lambda=2$.

4) Démontrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $Ker\,p\cap Ker\,q\neq\{0_E\}$.

5) Démontrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $Im\,p\cap Im\,q\neq\{0_E\}$.

Études de matrices 2x2, 3x3, 4x4, ... :

Ex13: Pour chacune des matrices suivantes, calculer le polynôme caractéristique, déterminer les éléments propres et dire si elle est diagonalisable.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ex14 : Diagonaliser $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. En déduire l'écriture de A^n pour tout entier naturel *n*.

Ex15: On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 & 1/a^3 \\ a & 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a^2 & a & 0 & 1/a \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{bmatrix}$ $[a \in \mathbb{R}^*]$

1) Vérifier que $A^2 - 2A - 3I_4$ est la matrice nulle.

2) En déduire que *A* est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de *A* et I_4.

3) Déduire aussi de la question 1 que $Sp_{\mathbb{C}}(A) = Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{3, -1\}$.

4) Calculer une base et la dimension de $E_{-1}(A)$.

5) Soit $X_0 = (1, a, a^2, a^3)$. Vérifier que $X_0 \in E_3(A)$.

6) Justifier sans calculs supplémentaires que *A* est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Donner une matrice diagonale *D* et une matrice inversible *P* telles que $A = P.D.P^{-1}$.

Ex16 : Soient $A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ab & 1+b^2 & bc \\ ac & bc & 1+c^2 \end{bmatrix}$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

1) Vérifier que le noyau de *A* est le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$.

2) Déterminer un vecteur directeur u_0 le plus simple possible de $Im\,A$. Vérifier que u_0 est un vecteur propre de *A* associé à une valeur propre non nulle.

3) En utilisant uniquement les résultats de 1) et 2), donner le spectre réel de *A* et une base de diagonalisation de *A*.

4) En déduire le spectre réel et une base de diagonalisation de *B*.

Ex17 : Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$, où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

1) Calculer les valeurs propres de *A*.

2) On suppose pour la suite de l'exercice que $a-b\neq 1$. Montrer que *A* est diagonalisable. Calculer les deux matrices *D* et *P* telles que $D=P^{-1}AP$ soit diagonale.

3) Calculer A^n, pour tout $n\geq 0$.

4) Calculer en fonction de *n*, u_0 et v_0 le terme général des deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par les relations de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1}=a.u_n+b.v_n \\ v_{n+1}=(1-a).u_n+(1-b).v_n \end{cases}$, $\forall n\geq 0$

Études de matrices *n* x *n* :

Ex18 : Pour chacune des matrices suivantes qui appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n\geq 2$, calculer le polynôme caractéristique, déterminer les éléments propres et étudier la diagonalisabilité :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ex19 : On considère la matrice réelle d'ordre 2*n* : $M=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \ddots & & & \iddots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a & b & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & b & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \iddots & & & \ddots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$

1) a) On peut vérifier que $M^2=2aM+(b^2-a^2)I_n$ (inutile de le faire !). En déduire que *M* est inversible si et seulement si $a^2\neq b^2$ et donner l'expression de M^{-1}.

b) Justifier que toute valeur propre λ de *M* vérifie : $\lambda^2=2a\lambda+(b^2-a^2)$. En déduire que *M* n'a que deux valeurs propres possibles, qu'on calculera en fonction de *a* et *b*.

2) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de *M*. Cette matrice est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

3) À l'exercice 8 de « Déterminants », on, a calculé que $det M=(a-b)^n(a+b)^n$. En déduire $\chi_M(X)$. Comparer avec les résultats obtenus en 1-b et 2.

Ex20 : Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on considère la matrice définie par blocs $M=\begin{pmatrix} aI_n & I_n \\ O_n & bI_n \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de M et donner leur ordre de multiplicité.

2) En notant $(e_1,e_2,...,e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, déterminer une base de $E_a(M)$.

3) En achevant la détermination des sous-espaces propres, montrer que M est diagonalisable si et seulement si $a\neq b$.

Ex21 : Soit la matrice d'ordre $n\geq 3$: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

1) Donner le rang de A et une base de $KerA$. Justifier que 0 est valeur propre de A de multiplicité au moins égale à $n-2$.

2) On pose $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et on considère le système (S) : $AX=\lambda X$, où λ est un réel non nul.

a) Prouver que, si (S) a une solution X non nulle, $\lambda^2=n-1$.

b) Démontrer que les deux nombres $\lambda_1=\sqrt{n-1}$ et $\lambda_2=-\sqrt{n-1}$ sont des valeurs propres de A et donner une base de $E_{\lambda_1}(A)$ et de $E_{\lambda_2}(A)$.

3) En justifiant soigneusement votre réponse, expliquez si A est ou non diagonalisable.

Endomorphismes trigonalisables :

Ex22 : Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1) Déterminer les éléments propres de Φ et montrer que Φ n'est pas diagonalisable.

2) Soit v un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre 1. Calculer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Phi(w)=v+w$.

3) En déduire une base (u,v,w) dans laquelle la matrice de Φ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Ex23}}$**:**Soit $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 11 \\ -14 & -6 & 10 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\chi_A(X)$. En déduire grâce à un raisonnement par l'absurde que A ne peut pas être diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2) On sait que toute matrice d'ordre 3 est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. En déduire, en utilisant de nouveau $\chi_A(X)$, que A^3 est la matrice nulle.

3) Montrer que A est semblable à $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Ex24: Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un entier $k\geq 2$ tel que $A^k=O_n$ et $A^{k-1}\neq O_n$. On dit que A est une *matrice nilpotente d'indice k.*

On rappelle que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Vérifier que 0 est la seule valeur propre de A et qu'elle est de multiplicité n. En déduire que $det(I_n+A)=1$.

2) Soit $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible telle que $AB=BA$. Montrer que $B^{-1}A$ est une matrice nilpotente d'indice k. En déduire que $det(A+B)=det\,B$.

Endomorphismes dans espaces de polynômes :

Ex25 : Soit $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme F défini par :

$$\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\ \ F(P)=Q\text{, où } Q(X)=(X^2-1)P''(X)+2XP'(X)$$

En déduire que F est diagonalisable et calculer une base de diagonalisation $\mathcal{B}'=(P_0,P_1,P_2)$ de F.

Ex26 : Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$. On considère l'endomorphisme $\varphi: E\to E\ ,\ \ P(X)\mapsto P(1-X)$

1) Montrer que φ est une symétrie de E.

2) Pour tout entier k appartenant à $[0,n]$, on pose $Q_k(X)=\left(X-\frac{1}{2}\right)^k$.

Montrer que $(Q_k, 0\leq k\leq n)$ est une base de vecteurs propres de φ.

3) Si F et G sont respectivement le sous-espace par rapport auquel et parallèlement auquel se fait la symétrie φ, donner les dimensions de F et de G [séparer les cas n pair et n impair].

$\boxed{\textbf{Ex27}}$ **:**Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $E=\mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'endomorphisme f défini sur E par :

$$\forall P\in E,\ f(P)(X)=X(1-X).P'(X)+n.X.P(X)$$

Pour chercher les éléments propres de f, on considère l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$: $f(P)=\lambda P$

1) Montrer que P vérifie ($\mathcal{E}_\lambda$) si et seulement si P est solution polynomiale de degré inférieur ou égal à n d'une équation différentielle linéaire du 1° ordre, qu'on notera ($\mathcal{D}_\lambda$).

2) Résoudre ($\mathcal{D}_\lambda$), puis montrer que ($\mathcal{D}_\lambda$) a des solutions appartenant à E si et seulement si λ est un nombre entier compris entre 0 et n.

3) Dresser la liste des valeurs propres de f, ainsi qu'une liste de vecteurs propres associés.

4) Écrire le polynôme caractéristique de f. Justifier la diagonalisabilité de f.

Ex28 : Soit F l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par : $\varphi(P) = Q$, où $Q(X) = P(X+1)$.

1) Soit P un vecteur propre de F associé à une valeur propre λ. Montrer que, si P a une racine α, il a une infinité de racines. Qu'en déduisez-vous ?

2) Donner le spectre de F et le sous-espace propre associé à chaque valeur propre.

Endomorphismes dans espaces de matrices :

Ex29 : On considère dans $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ et on définit l'endomorphisme φ par : $\forall M \in E,\ \varphi(M) = M.D - D.M$

On suppose que les coefficients $\alpha_i,\ 1 \le i \le n$, sont deux à deux distincts.

On rappelle que la base canonique de E est la famille $\mathcal{F} = (E_{ij}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$ où E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui situé à l'intersection de la i° ligne et de la j° colonne qui est égal à 1.

1) Pour $1 \le i \le n$, vérifier que $\varphi(E_{ii}) = O_n$.

2) Pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$, avec $i \ne j$, vérifier que E_{ij} est un vecteur propre de φ associé à une valeur propre non nulle que l'on donnera.

3) Déduire de 1) et 2) que φ est diagonalisable. Donner en outre le rang de φ.

Ex30 : Φ est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi(M) = {}^tM$.

1) On s'intéresse aux éléments propres de Φ. Pour cela on considère un scalaire λ et une matrice M_0 qui sont respectivement une valeur propre et un vecteur propre associés de Φ.

En utilisant la fonction trace, démontrer que $\lambda = 1$ ou $tr(M_0) = 0$.

2) On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n.

Vérifier que $E_1(\Phi) = S_n(\mathbb{R})$ et démontrer que $dim\, S_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3) En utilisant la fonction déterminant, montrer que Φ a une autre valeur propre α possible. Prouver que $dim\, E_\alpha(\Phi) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Φ est-elle diagonalisable ?

Endomorphisme dans espace de fonctions :

Ex31 : *E* est l'espace des fonctions continues de $[0,+\infty[$ dans ℝ. Pour $f \in E$, on définit *g* par :

$$g(0)=f(0) \text{ et, si } x>0, \ g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

On a démontré à l'exercice 10 de « Les vecteurs qui ne ressemblent pas à des vecteurs » que $T : f \mapsto g$ est un endomorphisme de *E*.

1) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de *T*.

2) Soit $\lambda \in]0,1]$ et *f* un élément de *E* vérifiant $T(f)=\lambda f$.

a) Montrer que, si $\lambda \in]0,1[$, $f(0)=0$.

b) Soit $x>0$. Montrer que *f* est solution de l'équation différentielle $\lambda xy'=(1-\lambda)y$. En déduire une formule pour $f(x)$ d'abord dans le cas $\lambda=1$ puis dans le cas $\lambda \in]0,1[$.

c) Pour tout $\lambda \in]0,1]$, donner une base du sous-espace $E_\lambda(T)$.