SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

Hypothèses* : x, y et z sont trois fonctions de classe C^1 d'une variable réelle t. Si nécessaire, on les notera $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. On pose** $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***et $X' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Ex1 : Pour chacun des systèmes suivants, calculer une base de diagonalisation de A et résoudre le système $Y = AX$.

a) $\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = 3x + y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = -x + 5y - z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = -m^2 x \\ y' = -y + (1-m^2)z \\ z' = y - (1+m^2)z \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

Ex2 : Résoudre astucieusement le système $\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$, en utilisant la fonction $s = x + y + z$.

Ex3 : *On se propose dans cet exercice de montrer que la résolution d'un système différentiel linéaire d'ordre 2 peut se ramener à celle d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.*

Soit le système (S) : $\begin{cases} x' = -2x - 4y \\ y' = -x + y \end{cases}$, où x et y sont deux fonctions de classe C^1.

1) Prouver que $(S) \Rightarrow (E) :\ y'' + y' - 6y = 0$.

2) Résoudre (E) et en déduire les solutions de (S).

Ex4 : On note (H) le système différentiel de l'exercice 1, question b).

1) Calculer l'unique solution (x, y, z) de (H) qui vérifie la condition initiale $x(0) = 3$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

2) $\mathbb{R}^3$ étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la courbe Γ de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

a) Montrer que Γ est une courbe plane, incluse dans le plan P d'équation $y - z = 0$.

b) Montrer que Γ est une partie stricte de la courbe Γ' d'équation cartésienne :

$$\begin{cases} y = z \\ (x - 2y)^2 (x + y) = 4 \end{cases}$$

Ex5 : Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -x + t - e^t \\ y' = 5x + y - t + 2e^t \end{cases}$

Ex6 : Soit le système différentiel (H) : $\begin{cases} x' = z - y \\ y' = z \\ z' = z - x \end{cases}$, écrit matriciellement $X' = AX$.

1) Montrer que la matrice A de (H) est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Donner l'expression générale des solutions complexes de (H).

3) En déduire l'expression générale des solutions réelles de (H).

Ex7 : Soit le système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = 8x - y + 3z \\ y' = 4x + 2z \\ z' = -22x + 3y - 8z \end{cases}$, écrit matriciellement $X' = AX$.

1) Justifier que A est trigonalisable, mais non diagonalisable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer ensuite une matrice inversible $P = (p_{ij})_{1 \le i, j \le 3}$ telle que :

$$p_{11} = 1,\ p_{12} = p_{13} = 0 \quad \text{et} \quad P^{-1}.A.P = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) a) On pose $Y = P^{-1}X$. Justifier que $Y' = P^{-1}X'$

b) Montrer, **sans calculer** $\boldsymbol{P^{-1}}$, que (S) : $X' = AX$ est équivalent à (T) : $Y' = TY$.

c) Résoudre (T). En déduire la résolution de (S).

Ex8 : Résoudre (S) : $\begin{cases} x' = -6x + 5y + 3z \\ y' = -8x + 7y + 4z \\ z' = -2x + y + z \end{cases}$ [A est trigonalisable comme à l'exercice 7.]

Ex9 : On suppose dans cet exercice que les fonctions x et y sont de classe C^2.

Résoudre astucieusement les deux systèmes (S) $\begin{cases} x'' = y \\ y'' = x \end{cases}$ et (T) $\begin{cases} x'' = x' + y' - x \\ y'' = x' + y' - y \end{cases}$.

Ex10 : a, k_1 et k_2 sont trois coefficients strictement positifs.

1) Résoudre le système (H) : $\begin{cases} x' = -k_1.(x + y) \\ y' = -k_2.(x + y) \end{cases}$

2) En déduire la solution générale de (S) : $\begin{cases} x' = k_1.(a - x - y) \\ y' = k_2.(a - x - y) \end{cases}$