SUITES

Quelques mises au point sur la *bonne* utilisation des *équivalents* :

<u>Rappel</u> : pour des suites réelles (x_n) et (y_n), les limites et les relations $x_n \sim y_n$ et $x_n = \circ(y_n)$ sont toujours définies pour n au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$.

<u>Définitions</u> : ➔ $\boxed{x_n \sim y_n \Leftrightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 1}$ ➔ $\boxed{x_n = \circ(y_n) \Leftrightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0}$

Soit (u_n) une suite réelle.

- ***Pour l'étude de la <u>convergence</u> de (u_n), on cherche <u>un équivalent simple</u> de $\boxed{u_n}$; en effet, si $u_n \sim a_n$ et si $\lim a_n = \ell$, avec $\ell \in \mathbf{R}$, $\ell = -\infty$ ou $\ell = +\infty$, on en déduit que $\lim u_n = \ell$.***
- ***Pour l'étude du <u>sens de variation</u> de (u_n), on cherche <u>un équivalent simple</u> de $\boxed{u_{n+1} - u_n}$. Si on trouve $u_{n+1} - u_n \sim b_n$ <u>et</u> si $b_n > 0$, on peut en déduire que $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc que (u_n) est strictement croissante, mais seulement À PARTIR D'UN CERTAIN RANG.***

Dans le cas particulier où $\boxed{u_n = f(n)}$, on a $\lim u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. De même, le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$ donne le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$, et donc le sens de variation de (u_n).

Limites et sens de variations :

Ex1 : On rappelle la formule : ➔ $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R},\ a^b = e^{b.\ln a}}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Établir que, lorsque n tend vers $+\infty$: $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

On en déduit : ➔ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}}$.

Ex2 : Étudier la convergence des suites (u_n) de terme général :

a) $u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$ b) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ c) $u_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

d) $u_n = (\ln n)^{\frac{1}{\ln n}}$ e) $u_n = \frac{\ln(2^n+1)}{n}$ f) $u_n = \sqrt[n]{n+1}$ [considérer $\ln(u_n)$] g) $u_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

h) $u_n = \frac{1^n + 2^n + \ldots + n^n}{n^{n+2}}$ i) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3-1}$ j) $u_n = n.\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ k) $u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$

Ex3 : Étudier le sens de variation des suites (u_n) de terme général :

a) $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ b) $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$ c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ d) $u_n = 2^{n+1}\sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$

e) $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...\sqrt{n}}{n}$ [Raisonner par équivalences successives]

Ex4 : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle ou complexe. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

1) Vérifier la formule : $\forall n \geq 2$, $\dfrac{u_n}{n} = T_n - T_{n-1} + \dfrac{T_{n-1}}{n}$

2) Démontrer l'implication : (T_n) converge $\Rightarrow$ $u_n = \circ(n)$

3) On choisit dans cette question $u_n = \sqrt{n}$. On a donc $u_n = \circ(n)$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'inégalité : $\sqrt{k} \geq \int_{k-1}^{k} \sqrt{x}.dx$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \geq \int_{0}^{n} \sqrt{x}.dx$.

c) Calculer $lim\, T_n$. Qu'en déduisez-vous par rapport au résultat de 2) ?

Calculs d'équivalents :

Ex5 : On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = ln(n) + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $d_n = u_{n+1} - u_n$. Calculer un équivalent simple de d_n lorsque *n* tend vers $+\infty$.

Ex6 : On note $a_n = exp(n^2) = e^{(n^2)}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1) Justifier que, pour $n \geq 1$: $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq n.exp((n-1)^2)$

2) En déduire que : $S_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$

Ex7 : 1) Prouver que : $\sqrt{n^2+1} = n + \dfrac{1}{2n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En déduire que : $sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right) \sim \dfrac{\pi}{n}$

2) Donnez également un équivalent de $sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Ex8 : 1) Soit (a_n) une suite strictement positive, avec $a_n = \circ\left(\sqrt{n}\right)$. Montrer que $\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^n \sim e^{a_n}$.

2) On suppose maintenant que $a_n \sim \sqrt{n}$. Trouver un équivalent simple de $\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^n$.

Ex9 : Soit $u_n = \dfrac{1!+2!+...+n!}{(n+2)!}$ $(n \geq 1)$.

1) En majorant $1!+2!+3!+...+n!$, montrer que $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$. Qu'en déduisez-vous sur (u_n) ?

2) a) Montrer que $u_n > \dfrac{1}{(n+2)^2}$.

b) Majorer $1!+2!+3!+...+(n-2)!$, puis u_n. En déduire l'équivalence : $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$.

Suites adjacentes :

Ex10 : Soient deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4}\ ,\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1) Pour tout $n \geq 0$, on pose $w_n = u_n + v_n$ et $t_n = u_n - v_n$. Déterminer les relations de récurrence que vérifient $(w_n)_{n\geq 0}$ et $(t_n)_{n\geq 0}$. En déduire w_n et t_n en fonction de n, w_0 et t_0.

2) En utilisant 1), démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Ex11 : Pour $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Ex12 : <u>Calcul préalable</u> : vérifier que, pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par les conditions initiales : $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{u_n} = \dfrac{1}{u_{n-1}} + \dfrac{1}{v_{n-1}}$, $v_n = \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{v_n}{u_n} \geq 1$. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$.

2) Justifier la convergence de (u_n) et (v_n). Montrer ensuite que $\lim u_n = \lim v_n$.

$\boxed{\textbf{Ex13}}$ **:** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{(-1)^n}{n-1} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1) Soit $u_n = T_{2n}$ et $v_n = T_{2n+1}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

2) Justifier que la suite (T_n) converge. [*On verra plus tard que sa limite vaut* $ln(2)$.]

3) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$. [*On a démontré en cours que la suite* (S_n) *converge.*] Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = T_{2n}$. Que peut-on en déduire ?

Suites définies par récurrence :

Ex14 : On considère la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par : $x_1 > 0$ et : $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+n.(x_n)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) On se place dans le cas particulier où $x_1 = 1$. Calculer x_n en fonction de n.

2) On revient au cas général où $x_1 > 0$.

a) Montrer que : $x_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Prouver que (x_n) converge.

c) Grâce à un raisonnement par l'absurde, montrer que (x_n) tend vers 0.

Ex15 : $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par : $u_0 = a > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = a + \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{2^{n+1}}u_n$

1) a) Calculer u_1 et u_2 en fonction de a. Vérifier que $u_2 > u_1 > 0$.

b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} > u_n > 0$. Qu'en déduisez-vous?

2) a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} < a + \dfrac{u_n}{2}$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{2^k}$

3) a) Montrer que (u_n) est majorée par $2a$

b) Justifier que (u_n) est convergente.

c) Montrer que $\lim u_n = 2a$.

Ex16 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$.

1) Le sens de variation de (u_n) est assez évident, n'est-il pas ?

2) Que constatez-vous lorsque $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$?

3) Quelles sont les limites finies possibles de (u_n) ?

4) On suppose $u_0 < 0$. Démontrer grâce à un raisonnement par l'absurde que (u_n) diverge.
Montrer que (u_n) tend vers $-\infty$.

5) On suppose $u_0 > 1$. Déterminer le signe de u_1. En déduire que (u_n) tend vers $-\infty$.

6) On suppose $0 < u_0 < 1$.

a) Établir que : $0 < u_n < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?