SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS DÉFINIES SUR UN INTERVALLE

Convergences simples :

Ex1 : Pour chacune des suites (f_n) suivantes, déterminer la partie D de $\mathbb{R}$ sur laquelle (f_n) converge simplement. Donner l'expression de $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout x appartenant à D.

a) $f_n(x) = e^{-nx}$ b) $f_n(x) = \dfrac{ln(n+x)}{ln(n)}$ c) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^x}$ $[x \in \mathbb{R}^+]$

Convergence dominée d'une suite de fonctions :

Ex2 : Pour chacune des suites (f_n) suivantes où les fonctions f_n sont définies sur l'intervalle I, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx$ en appliquant le théorème de convergence dominée. Veillez à bien vérifier <u>toutes</u> les hypothèses du théorème avant de conclure. On suppose $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, $I = [0,+\infty[$ b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx^3+2}$, $I = [1,+\infty[$

c) $f_n(x) = \dfrac{nx+1}{n(x^3+x)+1}$, $I = [0,+\infty[$ *[Indication pour c) : pour majorer $|f_n(x)|$ par $\varphi(x)$, choisir une fonction φ qui a une expression différente sur $[0,1]$ et sur $]1,+\infty[$.]*

Ex3 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et t réel on pose $f_n(t) = \left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

1) Montrer que, pour tout t fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n} = e^{-t^2}$.

2) Prouver en utilisant la formule du binôme que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n \geq 1+t^2$

3) Grâce aux deux questions précédentes, appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$ et énoncer la conclusion obtenue.

Ex4 : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ est définie si et seulement si $n \geq 2$.

2) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ de la suite $(f_n)_{n\geq 2}$, où $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

3) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \geq 2$, $0 \leq f_n(x) \leq \varphi(x)$, où $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1/x^2 & \text{si } x \in [1,+\infty) \end{cases}$

4) Prouver que $lim\, I_n = 1$

Ex5 : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx + x\sqrt{x}}$.

1) Prouver que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$.

2) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_*^+$.

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. [*Pour la majoration de* $|f_n(x)|$, *il faudra faire un calcul différent sur* $]0,1]$ *et* $[1,+\infty)$, *et utiliser les deux inégalités :* $\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin t| \le 1$ *et* $|\sin t| \le |t|$]

Ex6 : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$ on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 nx(1-x)^n\,dx$.

On se propose de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ par trois méthodes différentes.

<u>1° méthode</u> : on applique le <u>théorème de convergence dominée</u>.

1) Soit $x \in]0,1]$. Démontrer par passage à la forme exponentielle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n(1-x)^n = 0$.

2) En déduire la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier les variations de la fonction f_n sur $[0,1]$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall x \in [0,1],\quad 0 \le f_n(x) \le 1$$

4) Conclure.

<u>2° méthode</u> : calculer I_n en faisant une <u>intégration par parties</u>. Conclure.

<u>3° méthode</u> : calculer I_n en faisant un <u>changement de variable</u>. Conclure.

Ex7 : Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[0,1]$. On suppose que la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

1) Prouver que $f(0) = 0$. [*Indication : faire un raisonnement par l'absurde.*]

2) Pour tout entier $n \ge 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$. Montrer que $nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u} u^{1/n}\,du$.

3) Montrer en utilisant le théorème de convergence dominée que : $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$.

Ex8 : Soit la suite (f_n) de fonctions définies sur $[0,1]$ par : $f_n(t) = n^2 t(1-t)^n$

1) Prouver que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.

2) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt \ne \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(t)dt$. Qu'en déduisez-vous ?

Intégration terme à terme d'une série de fonctions :

$\boxed{\textbf{Ex9}}$ **:** 1) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x.e^{-nx}$. Montrer que f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2) Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} x.e^{-nx}.dx$ en fonction de *n.*

3) Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

4) Montrer que l'on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $]0,+\infty[$. En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et établir l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ex10 :1) a) Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que la fonction $x \mapsto \sin x.e^{-nx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b) Calculer $\int_0^{+\infty} \sin x.e^{-nx} dx$ [*si possible, se ramener à l'intégrale d'une exponentielle complexe. Sinon, faire deux intégrations par parties*.]

2) a) Vérifier l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ |\sin x| \leq x$

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} |\sin x|.e^{-nx} dx \leq \frac{1}{n^2}$ [*utiliser la question 2 de l'ex 9.*]

3) Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1}$. Écrire $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ comme somme d'une série géométrique. En déduire une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_*^+$ telles que : $f = \sum_{n\geq 1} f_n$

4) Grâce au théorème d'intégration terme à terme et aux résultats des questions précédentes, prouver que *f* est intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$ et établir l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

Ex11 : Pour $n \in \mathbb{N}$ et α paramètre positif, on pose $f_n(x) = x^n - x^{n+\alpha}$, où f_n est définie sur $[0,1[$.

1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

2) Prouver que S est intégrable sur $[0,1[$ et que $\int_0^1 S(x)dx = \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha}{n(n+\alpha)}$.

3) Écrire l'égalité précédente dans le cas où $\alpha = 1$ et en donner une autre démonstration.

Ex12 : On pose $f_n(x) = 2x.e^{-(2n+1)x}$ avec $x \in [0,+\infty[$.

1) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et déterminer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

2) Montrer que S est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} S(x)dx = 2.\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

3) Sachant que $.\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\int_0^{+\infty} S(x)dx$.

Ex13 : Pour tout $n \geq 0$, on note $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x).dx$.

1) Démontrer l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{\pi}{(n+1).(n+2)}.(1-\pi.I_{n+2})$

2) Montrer que $(I_{n+2}) \to 0$. En déduire un équivalent simple de I_n.

3) Prouver que : $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n$

Ex14 : On rappelle le développement : $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ [TD « Séries », exercice 7.]

On rappelle également que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n.\ln(t)dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$ [cours « Suites et séries de fonctions », exemple d'application du théorème d'ITT.]

Démontrer la formule : $\int_0^1 e^t.\ln(t)dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.n!}$