SÉRIES NUMÉRIQUES

Séries à termes positifs :

Ex1 : Déterminer la nature des séries suivantes en utilisant des théorèmes de comparaison ou la règle de d'Alembert :

a) $\sum \frac{n}{2n+1}$ b) $\sum \frac{n^3}{3^n}$ c) $\sum ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ d) $\sum ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ e) $\sum \frac{ln(n)}{2^n}$

f) $\sum \frac{a^n-1}{2^n}$ [$a>0$] g) $\sum \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ h) $\sum \left(\alpha^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$ [$\alpha>0$] i) $\sum e^{-n}$

j) $\sum \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n\sqrt{n}}$ k) $\sum \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+3)!}$ l) $\sum \frac{1+a^n}{n^\alpha}$ [$a>0, \alpha>0$]

m) $\sum \left(e^{\frac{1}{2n}}-e^{\frac{1}{2n+1}}\right)$ n) $\sum \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$ o) $\sum \left(cos\frac{1}{n}\right)^n$ p) $\sum \frac{1}{n^2(ln\, n)^2}$ q) $\sum \frac{1}{n^n}$

Ex2 : On considère la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = Arc\cos\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

1) Justifier qu'on peut écrire le développement limité : $cos(u_n) = 1-\frac{u_n^2}{2}+\circ\left(u_n^2\right)$

2) En déduire l'équivalence : $\frac{u_n^2}{2} \sim \frac{1}{n+1}$.

3) Déterminer la nature de $\sum u_n^2$ et de $\sum u_n$.

Ex3 : <u>**Formule de Stirling**</u> : $\boxed{n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$

<u>Application</u> : pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$, où α est un réel.

1) À partir de la formule de Stirling, prouver, pour n tendant vers $+\infty$, le développement :

$$ln(n!) = n\, ln\, n - n + \circ(n).$$

En déduire un développement pour $ln(u_n)$, puis un équivalent simple de u_n.

2) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles :

a) (u_n) converge

b) $\sum u_n$ converge.

Ex4 : 1) Justifier l'encadrement : $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ \displaystyle\int_{k-1}^{k} ln\, t.dt \leq ln\, k \leq \int_{k}^{k+1} ln\, t.dt$

[<u>Indication</u> : utiliser le fait que la fonction ln est croissante sur $]0,+\infty[$.]

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \displaystyle\int_{1}^{n} ln\, t.dt \leq ln(n!) \leq \int_{2}^{n+1} ln\, t.dt$

3) Calculer une primitive de $ln\, t$. En déduire l'équivalence : $ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n.ln\, n$.

Sommes et séries télescopiques (ou presque) – produits infinis :

Ex5 : Déterminer la nature de chacune des séries suivantes. Si elle converge, calculer sa somme ; si elle diverge, calculer la somme partielle au rang n :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{p+1}}$ c) $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p.(p+2)}$ d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$

Ex6 : 1) Déterminer trois constantes α, β, γ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{\alpha}{p+1} + \frac{\beta}{p+2} + \frac{\gamma}{p+3}$$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

Ex7 : En partant de l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2(n-1)\sqrt{n-1} \leq n\sqrt{n-1} + (n-1)\sqrt{n} \leq 2n\sqrt{n}$,
montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge et donner un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.\sqrt{n}}$.

Ex8 : On pose $P_n = \displaystyle\prod_{p=2}^{n} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n} ln\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$.

1) En factorisant $1-\dfrac{1}{p^2}$, montrer que $S_n = ln\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)$.

2) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n$, qu'on note $\displaystyle\prod_{p=2}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)$.

Ex9 : Soit $\theta \in]0,\pi[$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\prod_{p=0}^{n} cos\left(\frac{\theta}{2^p}\right) = \frac{sin(2\theta)}{2^{n+1} sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{p=0}^{n} cos\left(\frac{\theta}{2^p}\right)$, c'est-à-dire $\displaystyle\prod_{p=0}^{+\infty} cos\left(\frac{\theta}{2^p}\right)$.

Sommes et séries géométriques :

Ex10 : Pour $|z|<1$, démontrer <u>soigneusement</u> les inégalités : a) $\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| < \dfrac{2}{|1-z|}$ b) $\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \leq \dfrac{1}{1-|z|}$

Ex11 : On s'intéresse à la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{sin(nx)}{4^n}$, où x est un réel quelconque.

On note S_n la somme partielle de rang n de cette série.

1) Vérifier que S_n est la partie imaginaire de $T_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{e^{ipx}}{4^p}$.

2) Montrer que T_n est une somme géométrique et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{inx}}{4^n}$.

3) Établir la formule : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{sin(nx)}{4^n} = \dfrac{4\, sin\, x}{17-8\, cos\, x}$.

Ex12 :1) Soit $z = exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$. Vérifier que $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$.

2) On pose $S = z+z^2+z^4$ et $T = z^3+z^5+z^6$. Montrer que $S+T=-1$ et $ST=2$. En déduire S et T.

Ex13 :1) Soit $t \in [0,1]$. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{1+t} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} + \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}$ (*)

2) Par intégration de (*) sur $[0,1]$, montrer que : $ln\, 2 = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} + R_n$, où R_n est une intégrale à préciser (mais pas à calculer).

3) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$. En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et prouver la **formule de Leibniz** : $\boxed{1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}+...=ln\, 2}$

Séries alternées :

Ex14 :1) Justifier rapidement la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

2) Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

a) Vérifier que $\sum u_n$ est bien une série alternée mais que $|u_3| > |u_2|$. Qu'est-ce que vous ne pouvez donc <u>pas</u> dire sur $\sum u_n$?

b) Montrer que : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \circ\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ (*)

c) En étudiant la nature des 4 séries dont les termes généraux apparaissent dans la partie droite de (*) , montrer que $\sum u_n$ diverge [et pourtant on a bien $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$]

Ex15 : Soit la fonction $\varphi : x \mapsto \left(\frac{1}{x}+1\right) ln\, x$ définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Montrer que $\varphi'(x)$ a même signe que $g(x) = x+1-ln\, x$. En déduire le sens de variation de φ sur $\mathbb{R}_*^+$.

Application : justifier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n.\sqrt[n]{n}}$.

Ex16 : Soit $\alpha > 0$. En utilisant les résultats sur les séries de Riemann (alternées ou non), montrer que la série de terme général $ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge pour $\alpha > 1/2$ et diverge pour $0 < \alpha \leq 1/2$.

Ex17 :1) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente.

2) On admet la formule de Leibniz vue à **ex 13** : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = ln\, 2$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$.

Exercices plus subtils :

Ex18 : Soit (u_n) une suite réelle.

1) On suppose que la série $\sum u_n$ converge absolument. Montrer que $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

2) On suppose que la série $\sum u_n^2$ converge.

a) Démontrer l'inégalité suivante : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

b) En déduire que $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

3) On suppose que $\sum u_n$ converge absolument. Montrer que $\sum u_n^2$ converge.

4) Donner un exemple de suite réelle (u_n) telle que $\sum u_n^2$ converge et $\sum u_n$ diverge.

$\boxed{\textbf{Ex19}}$ **:**Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que : $0 \leq u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les séries $\sum u_n$, $\sum ln(1+u_n)$ et $\sum ln(1-u_n)$ sont toutes trois convergentes ou toutes trois divergentes.

Ex20 : Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à termes positifs reliées par :

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

2) Démontrer la réciproque de l'implication précédente.

Ex21 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs.

On pose, pour tout $n \geq 0$, $w_n = \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)}$ et $v_n = u_n w_n$.

1) Vérifier que : $\forall p \geq 1,\ w_{p-1} - w_p = v_p$.

2) Montrer que : $\forall n \geq 0,\ \sum_{p=0}^{n} v_p = 1 - w_n$.

3) Montrer que (w_n) est une suite convergente [on notera ℓ sa limite].

Qu'en déduisez-vous sur la série $\sum v_n$?

4) Démontrer l'équivalence suivante : $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 \Leftrightarrow \sum ln(1+u_n)$ diverge.

5) Justifier que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum ln(1+u_n)$ converge. En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 \Leftrightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

Ex22 : $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite positive et décroissante et, pour $n \geq 1$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$.

<u>Calcul préliminaire</u> : vérifier que $\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=1}^{n} u_p - nu_{n+1}$.

On suppose maintenant que $\sum u_n$ est une série convergente.

1) Montrer que $\sum v_n$ converge également.

2) En déduire que (nu_{n+1}) est une suite convergente, puis montrer qu'elle tend vers 0.

3) Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

<u>Application</u> : calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)...(n+a)}$ [où a est un entier ≥ 1]

Ex23 : [adapté de TPE 2016] k étant une constante >1, on considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{kn}\right)u_n$.

1) Justifier que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire le sens de variation de (u_n).

2) On pose $v_n = ln\left(n^{1/k}\, u_n\right)$. Calculer en fonction de k la constante C telle que $v_{n+1} - v_n \sim \frac{C}{n^2}$.

3) En déduire la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ et de la suite de terme général v_n.

4) Exprimer en fonction de k et de $\ell = lim\, v_n$ un équivalent simple de u_n. En déduire la nature des séries $\sum u_n$, $\sum \frac{u_n}{n}$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Ex24 : On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{1 + (u_{n-1})^2}$

1) Déterminer le sens de variation de (u_n), puis montrer en raisonnant par l'absurde que (u_n) tend vers $+\infty$.

2) Pour tout $n \geq 1$, simplifier la somme partielle $\sum_{p=1}^{n}\left(u_p - u_{p-1}\right)$. En déduire que la série $\sum\left(u_n - u_{n-1}\right)$ diverge.

3) Montrer que $u_n - u_{n-1} \sim \frac{1}{2u_{n-1}}$. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$.

Ex25 : Soit $u_n = \frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)}{n^{a-1}.n!}$, où a est une constante strictement positive et $n \geq 1$

1) Simplifier $\frac{u_n}{u_{n-1}}$; en déduire l'existence et le calcul d'une constante $C(a)$ telle que $ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{C(a)}{n^2}$, <u>sauf pour une valeur</u> a_0 de a que vous préciserez.

2) Donner la nature de la série $\sum ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$. En déduire la nature des suites $(ln\, u_n)$ et (u_n)