SÉRIES ENTIÈRES

Calculs de rayons de convergence :

Ex1 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum n^{\alpha} z^n \ [\alpha \in \mathbb{R}]$ b) $\sum n^n z^n$ c) $\sum (-1)^n z^{2n}$ d) $\sum z^n . ln(n)$ e) $\sum \binom{2n}{n} z^n$

f) $\sum \frac{n!\, z^n}{n^n}$ g) $\sum \frac{n!\, z^{2n}}{n^n}$ h) $\sum n!. z^{n^2}$ i) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n$ j) $\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} . z^n$

Ex2 : Calculer le rayon de convergence R des séries entières réelles qui suivent. Déterminer ensuite la nature de la série aux points $x = R$ et $x = -R$.

a) $\sum \frac{n}{n^2+1} x^n$ b) $\sum \big(ln(n+1) - ln(n)\big).x^n$ c) $\sum Arc\tan(n^{\alpha}).x^n \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Ex3 : Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \dfrac{1.1! + 2.2! + \ldots + n.n!}{n!}$.

1) Montrer que $a_n \geq n$.

2) Soit $n \geq 2$. En majorant $1.1! + 2.2! + \ldots + (n-2).(n-2)!$, montrer que $a_n \leq n+2$.

3) En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Ex4 : Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = n^{ln(n)}$. Montrer que $ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\,ln(n)}{n}$. En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Calculs de sommes :

On pourra utiliser les deux développements suivants (vus en cours) :

$$\boxed{\forall z \in D(0,1),\ \sum_{n=1}^{+\infty} n.z^n = \frac{z}{(1-z)^2}} \quad \text{et :} \quad \boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -ln(1-x)}$$

Ex5 : Calculer la somme de chacune des séries réelles suivantes, en précisant à chaque fois pour quelles valeurs de x le résultat est valable.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$ b) $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n+1) x^n$ c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n}$ e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

f) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n-1} x^{2n+1}$ g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ [par une méthode différente de celle utilisée au c)]

h) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ [la réponse est différente pour x>0 et x<0] j) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2-1}$

Ex6 : 1) Démontrer que, pour $|z|<1$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right).\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n.z^n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{2}z^n$. En déduire, pour $|z|<1$, une expression simple de $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{2}z^n$.

2) Calculer $g(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} n^2.z^n$

Ex7 : 1) En remarquant que, pour $x\geq 0$, la série de terme général $(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est alternée, démontrer qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$.

2) En déduire par invocation d'un **gros** théorème la formule : $\boxed{ln(2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}}$

Développements de fonctions en série entière :

Ex8 : Calculer le développement en série entière des fonctions réelles suivantes en précisant à chaque fois sur quel intervalle il est valable :

→ Penser, lorsque c'est nécessaire, aux deux méthodes de calcul, soit par primitivation/dérivation, soit par produit de Cauchy.

a) $ln(2-x)$ b) $ln(x^2-5x+6)$ c) $\frac{1}{(1+x)^2}$ [par les deux méthodes ci-dessus]

d) $sin^2 x$ e) $(1+x)e^{-x}$ f) $\frac{e^{-x}}{1+x}$ [le coefficient de x^n s'écrit en fonction de $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$]

g) $\int_0^x \frac{ln(1+t)}{t}dt$ h) $Arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ i) $e^x.cos\,x$ [utiliser l'exponentielle complexe]

Ex9 : a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a<b$. Déterminer les développements en série entière de $z\mapsto\frac{1}{1-az}$ et $z\mapsto\frac{1}{1-bz}$, en précisant les rayons de convergence.

En déduire le rayon de convergence et le développement en série entière de $z\mapsto\frac{1}{(1-az)(1-bz)}$.

Ex10 : 1) Déterminer le domaine de définition de $f:z\mapsto\frac{1}{z^2-5z+6}$.

2) Démontrer que f est développable en série entière sur $D(0,2)$ et calculer son développement.

Ex11 : À partir du développement en série entière de $(1+x)^{\alpha}$ pour $\alpha = -1/2$, montrer que :

$$\forall x \in \left]-1,+1\right[,\quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \binom{2n}{n} \cdot \frac{x^n}{4^n}$$

Exercices plus longs ou plus subtils :

Ex12: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul.

Montrer que la série $\sum a_n \dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Ex13 : Soit la série $\sum a_n . x^{2n+1}$ où $a_n = \dfrac{n!}{1.3....(2n-1).(2n+1)}$.

1) Justifier que le rayon de convergence est $\sqrt{2}$.

2) a) On pose $b_n = \dfrac{2^n . n!}{1.3....(2n-1).(2n+1)}$. Démontrer que la suite de terme général $(2n+1)b_n$ est croissante. En déduire que la série $\sum b_n$ diverge.

b) En déduire la nature de $\sum a_n . x^{2n+1}$ en $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$.

Ex14 : On appelle ***suite de Fibonacci*** la suite d'entiers naturels $(a_n)_{n\geq 0}$ ainsi définie :

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{et : } \forall n \geq 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (\mathcal{R})$$

1) Calculer a_n en fonction de n et montrez que $lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (qui est le ***nombre d'or***).

2) Sur quel intervalle I la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est-elle définie ?

3) En utilisant ($\mathcal{R}$), montrer que : $\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + a_1 x + x.(f(x) - a_0) + x^2 f(x)$.
En déduire l'expression de $f(x)$.

Ex15 :1) Soit $x \in \left]-1,1\right[$. Vérifier que : $\forall t \in \left[0,1\right[,\ \dfrac{1-t}{1+xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-t)(-1)^n t^n x^n$

2) En utilisant le **théorème d'intégration terme à terme**, établir que la fonction F définie sur $\left]-1,1\right[$ par $F(x) = \int_0^1 \dfrac{1-t}{1+xt} dt$ a pour développement en série entière :

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} x^n$$

3) Montrer que : $F(x)=\dfrac{(x+1)ln(x+1)-x}{x^2}$

Ex16 : θ est un réel vérifiant $\theta \neq 0[\pi]$. Pour $x\in]-1,+1[$, on pose : $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}$

1) Vérifier l'égalité : $\dfrac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}=\dfrac{1}{2i\sin\theta}.\left(\dfrac{e^{i\theta}}{1-x.e^{i\theta}}-\dfrac{e^{-i\theta}}{1-x.e^{-i\theta}}\right)$

2) Justifier le développement : $\dfrac{e^{i\theta}}{1-x.e^{i\theta}}=\sum_{n\geq 0}x^n.e^{i(n+1)\theta}$

3) Montrer que : $\varphi(x)=\sum_{n\geq 0}^{+\infty}x^n.\dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$

4) En déduire par intégration que : $Arctan\left(\dfrac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}\sin(n\theta)$

Ex17 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que la série de terme général a_n converge.

Pour $n\geq 0$, on définit $A_n=a_0+a_1+...+a_n$.

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on pose $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ et $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_nz^n$ et on note r et R les rayons de convergence respectifs de ces deux séries entières.

1) Un cas particulier : On suppose $a_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Montrer que $r\geq 1$ et $r\geq R$.

2) Retour au cas général : $a_n\in\mathbb{C}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que $r\geq 1$ et $r\geq R$.

b) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall z\in\mathbb{C}$, $\left(\sum_{p=0}^{n}A_pz^p\right).(1-z)=\sum_{p=0}^{n}a_pz^p-A_nz^{n+1}$

c) D est le disque-unité ouvert. Montrer que :

$$\forall z\in D,\ \sum A_nz^n \text{ converge et } F(z)=\frac{f(z)}{1-z} \quad (*)$$

d) En déduire que, si $r=1$, alors $R=1$.

3) Un exemple : $a_n=\dfrac{1}{n!}$. Calculer r et R. Que remarquez-vous ?

4) Retour au cas général : Montrer que, si $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\neq 0$, alors $\sum A_n$ diverge. En déduire R.