Révisions d'analyse PCSI

• *Dérivation en un point :*

Ex1 : Soit $f : A \to \mathbb{R}$, dérivable en x_0 .

a) Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$ en fonction de $f'(x_0)$.

b) Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ en fonction de $f'(x_0)$.

Ex2 : Soit $a > 0$. 1) Calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^x - e^a}{\ln x - \ln a}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^a - a^x}{x - a}$. [Indication : $x^a - a^x = (x^a - a^a) + (a^a - a^x)$]

Ex3 : a étant un réel strictement positif, calculer : a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\ln(x) - \ln(a)}$ b) $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{\sqrt{x - a}}{\ln(x) - \ln(a)}$

Ex4 : On pose $f(x) = x^2 \ln(x)$. Cette fonction est définie, continue, dérivable et même de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et dérivable en 0. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

2) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. La fonction f' est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

3) f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

• *Dérivation de f* o *g :*

Ex5 : Pour chacune des deux fonctions suivantes :

- déterminer le domaine de définition de f.
- déterminer le domaine de définition de f' et calculer $f'(x)$.
- vérifier que, pour $x > 0$, on a $f'(x) < 0$.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}$ b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}\right)$

Ex6 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant à chaque fois le domaine de définition de f et celui de f', et en simplifiant au maximum les résultats :

a) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ b) $f(x)=ln\left|tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$ c) $f(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Ex7 : On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=Arc\cos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

1) Déterminer son domaine de définition *Df*.

2) Montrer que *f* est dérivable en tous les points de *Df*, sauf un que vous préciserez.

3) Calculer l'expression de $f'(x)$, et la simplifier en distinguant deux cas.

4) En déduire une expression simple de $f(x)$, toujours en distinguant deux cas.

5) Dessiner le graphe de *f* en faisant apparaître les points et les tangentes (ou demi-tangentes) remarquables.

• *Formule de Leibniz :*

Ex8 : Soit $f(x)=(x-1).e^{-x}$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $n\geq 0$.

Ex9: Soit $f(x)=x^2\sin x$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $n\geq 2$.

[On demande que le résultat soit écrit : $f^{(n)}(x)=p_n(x).sin(x+n\dfrac{\pi}{2})+q_n(x).cos(x+n\dfrac{\pi}{2})$, où $p_n(x)$ et $q_n(x)$ sont deux polynômes dont les coefficients dépendent de *n*.]

• *Calculs de limites (sans développements limités) :*

Ex10 : Calculer les limites suivantes :

① *par utilisation d'identités conjuguées :*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

② *par utilisation de formules de trigonométrie :*

e) $\lim\limits_{x\to0^+}(1-\cos x).\ln x$ f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\tan x\right)$ g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{1+x^2}-\cos^2 x\right)$

③ *formes exponentielles :*   i) $\lim\limits_{x\underset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\cos x}$ j) $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$ k) $\lim\limits_{x\to0^+}x.e^{\frac{1}{\sin x}}$

④ *divers :* l) $\lim\limits_{x\to+\infty} x.ln(ln(x+1)-ln(x-1))$ m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{2^x-1}$

• *Comparaisons de fonctions :*

Ex11 : 1) Montrer que : a) $\sqrt{x+x^2}\sim x$ en $+\infty$ b) $\sqrt{x+x^2}\sim\sqrt{x}$ en 0 c) $e^{x+\sin x}\sim e^x$ en 0

d) $(\sin x)^x\sim x^x$ en 0 e) $x^{\sin x}\sim x^x$ en 0 f) $ln(x+2)\sim ln(x)$ en $+\infty$

Ex12 : Les équivalences suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifiez vos réponses.

a) $x\sim x+x^2$ en 0 b) $x+x\sin x\sim x$ en 0 c) $x+x\sin x\sim x$ en $+\infty$ d) $e^{(x^2)}\sim e^x$ en 0

e) $\sin x\sim ln(1+x+x^2)$ en 0 f) $e^{x+\frac{1}{x}}\sim e^x$ en $+\infty$ g) $e^{x+\sin x}\sim e^x$ en $+\infty$

h) $ln\left(x+\sqrt{x}\right)\sim ln(x)$ en $+\infty$ i) $ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sim ln(x)$ en $+\infty$ j) $ln\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)\sim ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0

• *Développements limités - application aux calculs de limites et aux recherches d'équivalents :*

Ex13 : On considère une fonction *f* définie au voisinage d'un réel x_0 et deux fois dérivable en x_0

En utilisant la formule de Taylor-Young, calculer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$.

Ex14 : Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes, à l'ordre indiqué :

a) $\cos^2 x$ à l'ordre 3 b) $\sin^2 x$ à l'ordre 5 c) $\sin x - x.\cos x$ à l'ordre 4

d) $\dfrac{1+x}{1-x}$ à l'ordre 5 e) $\dfrac{1}{1+\cos x}$ à l'ordre 3 f) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2}$ à l'ordre 3

g) $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ à l'ordre 3 h) $\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ à l'ordre 3 i) $ln\left(1+\cos x\right)$ à l'ordre 3

j) $e^{\sin x}$ à l'ordre 4 k) $e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2 l) $(1+x)^x$ à l'ordre 3

m) $\left(1+x^2\right)^{\sin x}$ à l'ordre 5 n) $(\cos x)^{1/x}$ à l'ordre 2 o) $(\cos x)^{(1+\sin x)}$ à l'ordre 4

Ex15 : Pour chacune des fonctions suivantes et au voisinage du point demandé, déterminer un équivalent le plus simple possible et calculer la limite:

a) $\dfrac{\sin x - x.\cos x}{ln(1+x)-x}$ en 0 b) $ln(x^2+x\cos x)$ en $+\infty$ c) $ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ en 0

d) $\dfrac{ln(\sin x)}{ln x}$ en 0 e) $\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}$ en 0 f) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ en 0 g) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ en $+\infty$

Ex16 : Chercher un équivalent simple de : a) $x-\sqrt{x^2+x^4}$ en 0^+ b) $x-\sqrt{x^2+2x}$ en 0^+

c) $\dfrac{1}{n+1}-ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ en $+\infty$ d) $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}+ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$ en $+\infty$ e) $x^{\frac{1}{x}}-1$ en $+\infty$

Ex17 : Soit $f(x)=(sin\,x+cos\,x)^{1/x}$.

1) Calculer la limite ℓ de $f(x)$ en 0.

2) Calculer un équivalent simple de $f(x)-\ell$ en 0.

• *Équations différentielles linéaires d'ordre* 1 *:*

Ex18 : Résoudre l'équation différentielle ($\mathcal{E}$) : $(x^2-1)y'+xy=1$ sur $]1,+\infty[$.

Ex19 : 1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle ($\mathcal{E}$) : $y'(1+x^2)=1+3xy$

2) Les solutions trouvées au 1) étant exprimées en fonction d'une constante réelle λ, montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 de λ pour laquelle la solution correspondante a une limite finie en $+\infty$.