RÉVISIONS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercices théoriques sur endomorphismes :

Dans les exercices 1 à 9, E est un K-espace vectoriel (a priori de dimension finie ou infinie), avec K= $\mathbb{R}$ ou K=$\mathbb{C}$. f et g sont des endomorphismes de E et Id_E est l'application-identité de E.

Ex1 : 1) Montrer que : $\boxed{Ker(f) \subset Ker(g \circ f)}$ et : $\boxed{Im(g \circ f) \subset Im(g)}$

2) On suppose que E est de dimension finie. Déduire de la question 1 les deux inégalités :

$$rg(g \circ f) \leq rg(g) \quad \text{et} \quad rg(g \circ f) \leq rg(f)$$

Ex2 : 1) Montrer que : $\boxed{\boldsymbol{g \circ f = 0 \iff Im(f) \subset Ker(g)}}$ [0 est l'endomorphisme nul.]

2) On suppose maintenant que E est de dimension finie.

Montrer que, si $g \circ f = 0$, alors $rg(f) + rg(g) \leq dim E$.

Ex3 : 1) Soit $u \in E$. Justifier l'équivalence : $u \in Ker(f^2) \Leftrightarrow f(u) \in Ker(f)$

On suppose que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$. Démontrer que $Ker(f^2) \subset Ker(f)$.

2) Démontrer l'équivalence : $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow Ker(f) = Ker(f^2)$

Ex4 : 1) Montrer que : gof injective $\Rightarrow f$ injective

2) Montrer que : gof injective $\Rightarrow Im f \cap Ker g = \{0_E\}$

3) Montrer que $g \circ f$ est injective si et seulement si $\begin{cases} Kerf = \{0_E\} \\ \text{et} \\ Im f \cap Ker g = \{0_E\} \end{cases}$.

Ex5 : On suppose que $f = g \circ g$ (ce qu'on peut noter $f = g^2$).

1) Montrer que $Ker(g) \subset Ker(f)$ et $Im(f) \subset Im(g)$.

2) Démontrer que : f bijective $\Leftrightarrow g$ bijective.

Ex6 : On suppose que $dim\, E = n$, avec $n \geq 1$.

L'endomorphisme f vérifie la condition $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$.

1) Démontrer en utilisant le résultat encadré à l'ex1 que $Im(f - 2Id_E) \subset Ker(f - 3Id_E)$.

2) En remarquant que $(f - 2Id_E) - (f - 3Id_E) = Id_E$, démontrer que :

$$E = Im(f - 2Id_E) + Im(f - 3Id_E)$$

3) Déduire de 1) et 2) la relation : $rg(f - 2Id_E) + rg(f - 3Id_E) = n$

$\boxed{\textbf{Ex7}}$ **:** Soient P un plan vectoriel et f un endomorphisme de P.

1) Montrer, en raisonnant sur les dimensions possibles, que l'on a deux possibilités:
   - soit $Im\, f = Kerf$
   - soit $P = Im(f) \oplus Ker(f)$
2) On suppose maintenant que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.
   a) Montrer que $Im\, f = Kerf$.
   b) Expliquer comment on peut choisir deux vecteurs e_1 et e_2 tels que (e_1,e_2) soit une base

de P et que la matrice de f dans la base (e_1,e_2) soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex8 : Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

1) On choisit un vecteur u_0 tel que $f^2(u_0) \neq 0_E$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B}=(u_0, f(u_0), f^2(u_0))$ est libre.
2) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3) Donner, à l'aide des éléments de $\mathcal{B}$, une base de $Im(f)$ et une base de $Ker(f)$.
4) On note $X = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$.
   a) Déterminer l'écriture de la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ lorsque g appartient à X.
   b) En déduire que $X = Vec(Id_E, f, f^2)$.

Ex9 : On suppose que $f^2 = k.f$, où k est un réel <u>non nul</u>.

1) Montrer que, si f est bijective, $f = k.Id_E$. [On dit que f est l'homothétie de rapport k.]
2) On suppose dorénavant que f n'est pas bijective.
   a) Montrer que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.
   b) Soit v un vecteur appartenant à $Im(f)$. Montrer que $f(v) = k.v$.
   c) Justifier que, si E est de dimension finie, $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont deux sous-espaces

supplémentaires de E. Expliquer alors comment on peut choisir une base de E telle que la matrice

de f dans cette base soit : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & k & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & k \end{bmatrix}$

Exercices de calcul sur endomorphismes :

Ex10 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ muni de la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)$ on considère l'endomorphisme f de matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer successivement une équation cartésienne de $Ker f$, une base de $Ker f$, une base de $Im\, f$.

Ex11 : Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}=(i,j,k)$.

f_t est l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M_t=\begin{bmatrix} t(t-1) & t(t+1) & -t \\ 1-t^2 & 1+t^2 & -t \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}$.

1) Déterminer le noyau et calculer le rang de f_t en discutant selon les valeurs de t.

2) Donner dans chaque cas une base de l'image de f_t.

Études de matrices $n\times n$:

Ex12 : Déterminer le noyau et l'image des matrices d'ordre n :

a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ [au b), séparer les cas n impair et n pair]

Ex13 : Calculer l'inverse des matrices d'ordre n :

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{bmatrix}$

$\boxed{\textbf{Ex14}}$ **:**Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n.

1) Montrer que : $rgA = 1 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$, avec $\begin{cases} (a_1,a_2,...,a_n) \neq (0,0,...,0) \\ (b_1,b_2,...,b_n) \neq (0,0,...,0) \end{cases}$

2) Dans le cas où A s'écrit ainsi, déterminer une équation cartésienne du noyau et un vecteur directeur de l'image.

3) Montrer qu'il existe une constante k (que vous calculerez en fonction de $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$) telle que $f^2 = k.f$. [Si vous voulez prolonger le travail, rendez-vous à l'ex9.]

Sous-espaces et familles de vecteurs dans espaces de matrices, de polynômes ou de fonctions :

Ex15 : Soit n un entier strictement positif. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient ${}^tM = M$, et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles antisymétriques d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient ${}^tM = -M$.

1) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que leur somme est directe.

2) En écrivant : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \dfrac{M+{}^tM}{2} + \dfrac{M-{}^tM}{2}$, prouver que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B} = \left(E_{ij},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n\right)$.

Justifier que toute matrice antisymétrique :

a) a des coefficients diagonaux nuls ;

b) peut s'écrire comme combinaison linéaire des matrices $E_{ij} - E_{ji}$, où $1 \le i < j \le n$.

En déduire que la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est inférieure ou égale à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

4) Majorer par une méthode analogue la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

En déduire les dimensions exactes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Ex16 : Soit n un entier naturel. Pour $0 \le k \le n$, on pose $P_{n,k}(X) = X^k.(1-X)^{n-k}$.

Montrer par récurrence sur n que $(P_{n,0},P_{n,1},...,P_{n,n})$ est base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ex17 : On considère n réels $a_1,a_2,...,a_n$, avec $a_1 < a_2 < ... < a_n$ et, pour tout i appartenant à [1,n], on définit la fonction f_i par : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_i(x) = (1+x)^{a_i}$

Montrer par récurrence sur n que $(f_1,f_2,...,f_n)$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Ex18 : On considère les deux matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

On appelle racine carrée de A toute matrice B appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et vérifiant $B^2=A$

1) Exprimer A et A^2 en fonction de I_3, C et C^2. En déduire C en fonction de I_3, A et A^2.

2) On note $V=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})/AM=MA\}$. Vérifier que V est un sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

3) Montrer que toute racine carrée de A appartient à V.

4) Soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que : $M\in V\Leftrightarrow MC=CM$

5) En utilisant 3) et 4), déterminer toutes les racines carrées de A.

Endomorphismes dans espaces de matrices, de polynômes ou de fonctions :

$\boxed{\textbf{Ex19}}$ **:**On considère l'application Ψ, qui, à tout polynôme P, fait correspondre le polynôme $Q=\Psi(P)$ défini par : $Q(X)=X(1-X)P'(X)+aXP(X)$ [où a appartient à $\mathbb{N}^*$]

1) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_a[X]$.

2) Déterminer la matrice de Ψ dans la base canonique $\mathcal{B}=(1,X,\dots,X^a)$ de $\mathbb{R}_a[X]$.

3) Résoudre l'équation différentielle $x(1-x)y'+axy=0$.

4) En déduire une base de $Ker\Psi$. Donner ensuite une base de $Im\,\Psi$.

$\boxed{\textbf{Ex20}}$ **:**Soit F l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $F(M)=M'$, où :

$$\text{si } M=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\ \text{alors } M'=\begin{bmatrix}a-b&d-c\\c-d&b-a\end{bmatrix}$$

1) Déterminer la matrice de F dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Déterminer une base de $KerF$ et une base de $Im\,F$, en exprimant les vecteurs de ces deux bases en fonction des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) A-t-on $dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))=dim(Im\,F)+dim(KerF)$? A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=Im\,F\oplus KerF$?

Ex21 : Soit $U=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$, matrice carrée d'ordre n.

Pour tout M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $\phi(M)=UMU$.

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Calculer $\phi(M)$ en fonction de U et des coefficients m_{ij} de M.

3) Donner une base de $Im\,\phi$ et une base de $Ker\phi$.

Ex22 : On considère l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \ \Phi(P) = Q \text{, où } Q(X) = P(X+1).$$

1) Écrire la matrice M de Φ dans la base canonique $\mathcal{B}=(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit Ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \ \Psi(P) = R \text{, où } R(X) = P(X-1).$$

Que remarquez-vous sur $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$? Qu'en déduisez-vous sur Φ ?

3) Justifier que M est une matrice inversible et calculer M^{-1}.

Ex23 : E est l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞. ω est un réel strictement positif. On définit l'application T par la formule : $\forall f \in E$, $T(f) = f'' - \omega^2 f$

1) Prouver que T est un endomorphisme de E.

2) Déterminer une base et la dimension de $Ker(T)$.

Ex24 : Dans $E=\mathbb{R}_n[X]$, avec $n \geq 2$, on considère la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ définie par :

$$P_0(X) = 1,\ \ P_1(X) = X \ \text{ et : } \ \forall k \in [2,n],\ P_k(X) = \frac{X.(X-k)^{k-1}}{k!}$$

1) Justifier que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.

2) Vérifier que : $\forall k \in [1,n],\ P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$

3) Soit f l'application qui, à tout élément P de E associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(X) - P'(X+1)$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base $(P_0, P_1, ..., P_n)$.

b) Montrer que f est bijectif et donner la matrice de f^{-1} dans la base $(P_0, P_1, ..., P_n)$.

Ex25 : ***<u>Partie I</u> :*** Φ est l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P)(X) = X^2 P''(X) - 4XP'(X) + 6P(X)$$

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Donner la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Déterminer une base de $Ker(\Phi)$ et une base de $Im(\Phi)$.

<u>Partie II</u> : on note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solutions de l'équation différentielle $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$.

A tout élément f de E on associe l'application g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

1) Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $g''(x)$.

2) En déduire une base et la dimension de l'espace E.