Variables aléatoires discrètes – démonstrations

Pour votre colle, vous devez apprendre, au choix : ***- 3 démonstrations de la catégorie 1***
ou : ***- 2 démonstrations de la catégorie 2***

En outre, vous ne devez pas avoir plus d'une démonstration apprise en commun avec chacun des 2 autres membres de votre groupe de colle **[par exemple, élève 1 : démonstrations 1,2 et 4 ; élève 2 : démonstrations 2, 5 et 6 ; élève 3 : démonstrations 7 et 9].** ***Concertez-vous !***

Catégorie 1 :

1. Inégalité de Markov [*preuve ② du polycopié*]

2. La fonction génératrice G_X est définie et continue sur $[-1,1]$ [*preuve vue en cours*]

3. Si X a une espérance, G_X est dérivable en 1 et $E(X) = G'_X(1)$ [*preuve vue en cours*]

4. Pour une loi géométrique, calcul de $E(X)$ par au moins deux méthodes différentes [*calculs vus en cours*]

5. Pour une loi géométrique, calcul de $V(X)$ [*preuve ④ du polycopié*]

6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p. Calcul des lois de $W = Min(X,Y)$ et $Z = Max(X,Y)$. [*exemple fait en cours*]

Catégorie 2 :

7. Formule $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$ [*preuve ① du polycopié*]

8. Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson [*preuve ⑤ du polycopié*]

9. Dans une boutique le nombre de clients qui achète en une heure suit une loi de Poisson de paramètre λ. Il y a deux caisses A et B. Pour chaque client la probabilité qu'il paie à la caisse A est $p \in]0,1[$ et la probabilité qu'il paie à la caisse B est $q = 1 - p$. Déterminer la loi de la variable aléatoire comptant le nombre de clients qui paient à la caisse A en une heure. [*exercice vu en cours*]

10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. À partir de la formule $P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k).P(Y=n-k)$:

- calcul de la loi de $X+Y$ lorsque X et Y suivent deux lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ ;
- calcul de la fonction génératrice de $X+Y$. [*calculs faits en cours*]