Colles PC
Semaines 5 et 6 (27/01 → 07/02)

Séries entières réelles ou complexes :

Lemme d'Abel. Rayon de convergence.

Domaine de convergence, disque ouvert de convergence, cercle d'incertitude.

Calcul du rayon de convergence :

- si $a_n \neq 0$ pour tout *n*, application de la formule $lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$,
- sinon, retour à la règle de d'Alembert générale.

Comparaison des rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$: cas $|a_n| \leq |b_n|$, $a_n = \circ(b_n)$, $a_n = O(b_n)$, $a_n \sim b_n$.

Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Séries entières réelles :

Convergence normale de la série sur tout segment $[-A, A]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Continuité, primitivation et dérivation terme à terme de la somme d'une série entière sur $]-R, R[$.

Toute fonction développable en série entière est de classe C^∞, et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Développements en série entière à connaître :

Fonctions à variable complexe : $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{1+z}$, e^z.

Fonctions à variable réelle : $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, ln(1+x), e^x, cos\,x, sin\,x, chx, shx, Arctan\,x, (1+x)^\alpha$.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 : révision PCSI

Résolution et prolongements éventuels de solutions.

TSVP

★ ***<u>Les 3 formules de la quinzaine</u>* :**

① $\forall z \in D(0,1)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n.z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$

② $\forall \ x \in \left]-1,1\right[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -ln(1-x)$

③ Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Pour $|z| < min(R_a, R_b)$, $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, où $\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.