Colles PC
Semaines 49 et 50 (2/12 → 13/12)

Déterminants – calculs pratiques :

Essentiellement des calculs sur des déterminants d'ordre n.

Éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme :

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre d'un endomorphisme.

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre réel et spectre complexe d'une matrice. Notations $E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda Id)$ et $E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n)$.

Toute somme de sous-espaces propres distincts est directe.

Endomorphismes et matrices diagonalisables :

Définition d'un endomorphisme et d'une matrice diagonalisables.

Formules $A = PDP^{-1}$ et $A^n = P.D^n.P^{-1}$.

Critère n°1 : f est diagonalisable et $Sp(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$

$$\Leftrightarrow E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}(f)$$

$$\Leftrightarrow dim\, E = dim\, E_{\lambda_1}(f) + dim\, E_{\lambda_2}(f) + ... + dim\, E_{\lambda_p}(f)$$

Polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme :

Définition : $\chi_f(X) = det(X.Id - f)$ et $\chi_A(X) = det(X.I_n - A)$

Écriture : $\chi_A(X) = X^n - (TrA)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det A$

Proposition : λ est valeur propre $\Leftrightarrow$ λ est racine du polynôme caractéristique.

Multiplicité (ou ordre) d'une valeur propre.

Si λ est valeur propre de f de multiplicité q, $1 \le dim\, E_\lambda(f) \le q$.

Critère n°2 : f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ χ_f est scindé dans $K[X]$ et, pour toute valeur propre λ, la dimension de $E_\lambda(f)$ est égale à la multiplicité de λ.

Corollaire : dans un espace de dimension n, tout endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Endomorphismes et matrices trigonalisables :

Définition. Critère : f est trigonalisable $\Leftrightarrow$ χ_f est scindé.

Corollaires : - toute matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;

- la trace et le déterminant d'une matrice sont respectivement la somme et le produit de ses valeurs propres complexes.

★ ***Les 3 formules de la quinzaine*** **:**

① $\forall u \in E, \forall \lambda \in K,\ u \in Ker(f - \lambda Id_E) \Leftrightarrow f(u) = \lambda u$

② $\forall X \in \mathbb{C}, \forall \theta \in \mathbb{R},\ X^2 - 2X\cos\theta + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$

③ Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont la liste des valeurs propres complexes est $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$,

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ et } det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$