

Colles PC

Semaines 41 et 42 (7/10 → 18/10)

★ Intégrales simples : révision PCSI.

★ Intégrales généralisées – fonctions intégrables sur un intervalle :

• **Définitions** :

Fonctions continues par morceaux, intégrale sur un segment et primitives.

Convergence et divergence d'une intégrale généralisée.

Cas des fonctions prolongeables par continuité en une extrémité d'un intervalle borné.

• **Intégrales généralisées de fonctions positives** :

Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Théorèmes de comparaison.

• **Intégrales absolument convergentes – fonctions intégrables** :

Définition de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle.

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Théorèmes de comparaison appliqués aux fonctions intégrables.

Exemple fait en cours d'intégrale convergente, mais non absolument convergente : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

★ Suites et séries de fonctions définies sur un intervalle :

Notion de convergence simple d'une suite de fonctions sur un intervalle.

Théorème de convergence dominée d'une suite de fonctions.

Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

★ Les 3 formules de la quinzaine :

$$\textcircled{1} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin \theta \cos \theta$$

$$\textcircled{2} \quad \int \ln x dx = x \ln x - x + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Pour toute fonction } f \text{ intégrable sur } [a, b], [a, b[,]a, b] \text{ ou }]a, b[, \quad \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$