Colles PC
Semaines 13 et 14 (23/03 $\rightarrow$ 3/04)

Espaces préhilbertiens et euclidiens :

Produit scalaire, norme euclidienne.

Orthogonalité de vecteurs. Familles orthogonales et orthonormées. Bases orthonormées.

Écriture du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

Écritures matricielles $(u|v)={}^tX.Y$ et $\|u\|^2={}^tX.X$.

Orthogonalité de sous-espaces. Orthogonal $F^{\perp}$ d'un sous-espace F.

Si F est de dimension finie, $E=F\overset{\perp}{\oplus}F^{\perp}$.

Projection p et symétrie s orthogonales. Propriétés : $\|p(u)\|\leq\|u\|$ et $\|s(u)\|=\|u\|$.

Formule $p(v)=\sum_{i=1}^{q}(u_i|v).u_i$, où $(u_1,u_2,...,u_q)$ est base orthonormée du sous-espace F.

Distance d'un vecteur u à un sous-espace F : $d(u,F)=\|u-p(u)\|=\min_{w\in F}\|u-w\|$.

Isométries vectorielles et matrices orthogonales :

• Définition d'une isométrie : c'est un endomorphisme qui conserve le produit scalaire.

Équivalence avec la conservation de la norme et avec la transformation d'une base orthonormée en une base orthonormée.

Propriétés : f est bijective, f^{-1} est une isométrie et $Sp(f)\subset\{-1,1\}$.

Si F est un sous-espace stable par f, $F^{\perp}$ est aussi stable par f.

• Définition d'une matrice orthogonale : ${}^tM.M=I_n$.

Critères : M matrice orthogonale $\Leftrightarrow$ M est inversible et $M^{-1}={}^tM$ $\Leftrightarrow$ M est la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée $\Leftrightarrow$ M est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée $\Leftrightarrow$ les vecteurs-colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Propriété $\det M\in\{-1,+1\}$. Orientation de l'espace euclidien.

Écriture des matrices orthogonales d'ordre 2. Rotations et réflexions.

En dimension n, les symétries orthogonales sont des isométries.

Endomorphismes symétriques :

Définition. Critère : sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Exemple : projections et symétries orthogonales.

Théorème spectral :

- tout endomorphisme symétrique admet une base orthonormée de diagonalisation.
- si M est une matrice symétrique, toutes ses valeurs propres sont réelles, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il existe P orthogonale et D diagonale telles que $M=P.D.{}^tP$.

★ ***Les 3 formules de la quinzaine* :**

① Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,...,e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E. Soient $u\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $v\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Si on pose $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $(u|v)={}^tX.Y$ et $\|u\|^2={}^tX.X$.

② Si F est un sous-espace vectoriel de E, de base orthonormée $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_q)$, pour tout vecteur u de E, la projection orthogonale de u sur F est : $p(u)=\sum_{i=1}^{q}(u|\varepsilon_i)\varepsilon_i$

③ Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.
Soit f un endomorphisme de E et M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
Alors :
- f est une isométrie vectorielle si et seulement si ${}^tM=M^{-1}$,
- f est un endomorphisme symétrique si et seulement si ${}^tM=M$,
- f est une symétrie si et seulement si $M=M^{-1}$.