Colles PC
Semaines 7 et 8 (10/02 → 21/02)

Variables aléatoires discrètes - loi, espérance, variance :

Pour une variable aléatoire finie, j'ai noté $X(\Omega)=\{x_1,x_2,...,x_n\}$.

Pour une variable aléatoire dénombrable, j'ai noté $X(\Omega)=\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$.

Loi d'une variable aléatoire. Pour une v.a. dénombrable, c'est la suite $(x_n,p_n)_{n\geq 0}$ avec $p_n = P(X=x_n)$. Une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est la loi d'une v.a. X si et seulement si :

$$\text{(i) } p_n \geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{et : } \quad \text{(ii) } \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

Espérance, variance, écart-type.

Formules : $E(aX)=aE(X)$, $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, $E(X+k)=E(X)+k$

$$E(X_1+X_2+...+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+...E(X_n)$$

$$V(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$V(aX)=a^2.V(X),\quad V(X+k)=V(X)$$

Théorème du transfert : $E(\varphi(X))=\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi(x_n).P(X=x_n)$

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebichev.

Cas particulier - variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$:

Formules : - $P(X=n)=P(X\leq n)-P(X\leq n-1)$ et $P(X=n)=P(X\geq n)-P(X\geq n+1)$

- si $X(\Omega)=\mathbb{N}$, $E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X\geq k)$

Série génératrice $\sum P(X=k).t^k$.

La fonction génératrice $G_X : t\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k).t^k$ est définie et continue au moins sur $[-1,1]$.

Formules : $G'_X(1)=E(X)$, $G''_X(1)=E(X^2)-E(X)$

Lois usuelles :

Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson : définition, espérance, variance et série génératrice.

Approximation des lois binomiales $\mathcal{B}(n,p_n)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque $np_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda$.

Couples et familles de variables aléatoires discrètes :

Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.

Covariance et coefficient de corrélation linéaire.

Formules : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$

$$V(X_1+X_2+...+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+...V(X_n)+2.\sum_{1\leq i<j\leq n}Cov(X_i,X_j)$$

Couples de variables aléatoires indépendantes.

Familles de variables aléatoires deux à deux indépendantes ou mutuellement indépendantes.

Cas particulier - couples de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans N :

Minimum et maximum de X et Y :

- si $Z=Max(X,Y)$, $P(Z\leq k)=P(X\leq k).P(Y\leq k)$
- si $W=Min(X,Y)$, $P(W\geq k)=P(X\geq k).P(Y\geq k)$

Somme de X et Y :

- si $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}$, $P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k).P(Y=n-k)$
- si $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $P(X+Y=n)=\sum_{k=1}^{n-1}P(X=k).P(Y=n-k)$
- si X et Y ont pour loi $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$, $X+Y$ a pour loi $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$
- $G_{X+Y}=G_X.G_Y$