DÉNOMBREMENTS ET PROBABILITÉS

Dénombrements et probabilités « faciles » :

Ex1 : Dans la classe de PC du lycée de La Parité-sur-mer, il y a $2n$ élèves : n filles et n garçons.

1) Combien y a-t-il de manières différentes de découper la classe en n binômes numérotés?

[Indication : compter le nombre de manières de former le 1° binôme, puis le 2°, etc.]

2) En déduire le nombre de manières différentes de découper la classe en n binômes non numérotés.

3) Combien y a-t-il de manières différentes de découper la classe en n binômes numérotés mixtes ?

Ex2 : Une société belge emploie p Flamands et q Wallons.

Chaque matin, les employés se saluent deux par deux :

- en français, si ce sont deux Wallons ;
- en flamand, si ce sont deux Flamands ;
- en anglais, si ce sont un Wallon et un Flamand.

1) Combien y a-t-il de salutations matutinales en français? en flamand? en anglais?

2) En déduire la formule: $\binom{p+q}{2} = \dfrac{p(p-1)+2pq+q(q-1)}{2}$

Ex3 : Anne-Sophie, c'est son souci, a n amis et ne peut en inviter que p ($p \in [\![2,n]\!]$).

Parmi ses amis, il y a Charles-Hubert et Marie-Josèphe qui ne peuvent pas se supporter.

1) Combien Anne-Sophie peut-elle établir de listes d'invités ne comportant ni Marie-Josèphe, ni Charles-Hubert?

2) Combien Anne-Sophie peut-elle établir de listes d'invités comportant soit Marie-Josèphe, soit Charles-Hubert, mais pas les deux ?

3) En déduire la relation : $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2.\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$

Ex4 : Une loterie se déroule une fois par semaine. Sur 100 billets, 5 sont gagnants.

Chaque billet coûte 1€ et je dispose de 10€.

<u>Première stratégie</u> : j'achète 10 billets dun coup.

<u>Deuxième stratégie</u> : j'achète un billet par semaine pendant 10 semaines.

Quelle est la meilleure stratégie pour avoir au moins un billet gagnant ?

[Indication : calculer dans chaque cas la probabilité de n'avoir aucun billet gagnant.]

Ex5 : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de couples d'entiers naturels (x, y) qui vérifient l'équation $x + y = n$.

2) En déduire le nombre de triplets d'entiers naturels (x, y, z) qui vérifient $x + y + z = n$.

Ex6 : Dans un groupe de *n* personnes ($n \geq 2$), chacune envoie un message à l'un des $n-1$ autres membres du groupe. [Une personne ne peut pas s'écrire à elle-même.]

1) Définir Ω et donner $Card(\Omega)$.

2) Quelle est la probabilité que Marcel, membre du groupe, ne reçoive aucun message ?

3) Soit k un entier, $k \leq n$. Quelle est la probabilité que Marcel reçoive exactement k messages ?

4) Marcel et ses copains du groupe forment une bande de p joyeux lurons, avec $2 \leq p \leq n$.

a) Quelle est la probabilité que ce soient eux qui reçoivent tous les messages ?

b) Quelle est la probabilité qu'ils ne reçoivent aucune message ?

Ex7 : Une urne irlandaise contient une boule verte, une boule blanche et une boule orange. On y effectue *n* prélèvements avec remise ($n \geq 3$).

1) Décrire l'univers Ω des résultats et donner $Card(\Omega)$.

2) On définit les événements A : "j'obtiens au moins une boule orange", B : "j'obtiens au moins une boule blanche" et C : "j'obtiens au moins une boule verte".

Justifier que $P(A) = P(B) = P(C) = 1 - \dfrac{2^n}{3^n}$.

3) Que pensez-vous de $P(A \cup B \cup C)$?

4) Calculer $P(A \cap B)$.

5) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule de chaque couleur. Quelle est la limite de cette probabilité quand *n* tend vers $+\infty$?

Ex8 : Le chevalier de Méré soumit le problème suivant à Blaise Pascal : est-il plus probable d'obtenir au moins un six en lançant un dé 4 fois de suite ou d'obtenir au moins un double six en lançant deux dés 24 fois de suite?

Le « raisonnement » proposé à l'époque était le suivant : il y a 1 chance sur 6 d'obtenir un six en lançant un dé et 1 chance sur 36 d'obtenir un double six en lançant deux dés. Comme 4/6=24/36=2/3, les probabilités de succès doivent être égales dans les deux cas.

Or le chevalier de Méré, qui était un joueur acharné, avait constaté que ce calcul n'était pas validé par son expérience : il gagnait plus souvent en faisant le premier pari qu'en faisant le deuxième. Pascal s'est donc intéressé au problème. Il en parle à Pierre de Fermat dans une lettre datée du 29 juillet 1654 : « *Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M[éré], car il a très bon esprit, mais* ***il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut)*** *et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai pu l'en tirer. Si vous pouviez le faire, on le rendrait parfait.* »

Faites comme Pascal : calculez les deux probabilités et vérifiez que le chevalier ne s'était pas trompé.

Intersections d'événements indépendants – réunions d'événements incompatibles :

Ex9 : Les Shadoks ont décidé de lancer une fusée pour aller sur la Terre, mais leur fusée est vraiment très mal conçue. Le professeur Shadoko a calculé qu'elle a une chance sur 1000 de décoller à chaque essai. En outre les essais sont mutuellement indépendants, car les Shadoks sont trop bêtes pour tirer les leçons d'un essai raté. Le professeur conclut toutefois qu'il suffit de se dépêcher de rater 999 essais pour être sûr de réussir le 1000$^{\text{ème}}$. N'est-il pas trop optimiste? Aidez-le en calculant la probabilité que, sur 1000 essais, au moins un réussisse.

Ex10: On considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $\frac{1}{3}$. [Elle est truquée ! Mais elle ne retombe jamais sur la tranche.]

1) On s'intéresse à l'événement A_n = "la séquence pile-face apparaît pour la première fois aux lancers n-1 et n".

a) Vérifier que, si un résultat appartient à A_n, les $n-2$ premiers lancers donnent une succession du type *PP..P* ou *FPP..P* ou *FFPP..P* ou …. En déduire que A_n contient exactement $n-1$ résultats.

b) Calculer la probabilité d'obtention de chacun des $n-1$ résultats précédents. En déduire l'écriture de $P(A_n)$ sous forme d'une somme. La calculer.

2) Calculer la probabilité de l'événement J="la séquence pile-face n'apparaît jamais".

$\boxed{\textbf{Ex11}}$ **:**On lance un dé… indéfiniment! Les lancers sont mutuellement indépendants.

1) Pour $n \geq 1$, on a calculé en cours la probabilité de l'événement U_n : "le numéro 6 n'est jamais sorti entre le 1° et le n° lancer". Calculer la probabilité des événements :

a) V_n : "le numéro 6 est sorti au moins une fois entre le 1° et le n° lancer".

b) T_n : "le numéro 6 est sorti exactement une fois entre le 1° et le n° lancer".

2) Pour $n \geq 1$, on a calculé en cours la probabilité de l'événement S_n : "le numéro 6 est sorti pour la première fois au n° lancer". Calculer, pour $n \geq 2$, la probabilité de l'événement W_n : "le numéro 6 est sorti pour la deuxième fois au n° lancer".

3) Soit l'événement W: "le numéro 6 sort au moins deux fois au cours de l'expérience". Exprimer W en fonction des W_n, $n \geq 2$. Vérifier que W est quasi-certain.

[On pourra utiliser le développement en série entière : $\forall x \in \left]-1,1\right[, \ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.]

Ex12 :n étant un entier strictement positif, on joue $2n$ fois à pile ou face.

1) Définir Ω et donner Card(Ω).

2) Montrer que la probabilité de l'événement C="on a obtenu autant de piles que de faces" est égale à : $P(C) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

3) On s'intéresse à l'événement A="on a obtenu strictement plus de piles que de faces".

Définir un événement B tel que (A,B,C) soit un système complet d'événements de Ω et justifier que $P(A)=P(B)$. En déduire $P(A)$.

4) Pour $0 \leq k \leq 2n$, on définit l'événement A_k="on a obtenu pile k fois".

a) Calculer $P(A_k)$. En déduire une expression sommatoire de $P(A)$.

b) En déduire les valeurs de $S = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k}$ *et* $T = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}$.

Ex13 : Pince-mi et Pince-moi sont dans un bateau. À tour de rôle, l'un pousse l'autre et la probabilité que celui qui est poussé tombe à l'eau est égale à p (avec $0 < p < 1$). Le perdant est évidemment le premier qui tombe à l'eau.

1) Pince-mi pousse en premier. Calculer la probabilité que Pince-mi gagne. Calculer de manière analogue la probabilité que Pince-moi gagne.

2) Calculer la probabilité que le jeu continue indéfiniment.

Formule de Bayes :

Ex14 : Pour tracer une route en Corse, on lâche un âne dans le maquis. L'âne refuse de travailler deux fois sur cinq. Dans ce cas, on fait venir des polytechniciens du continent.

La route tracée par l'âne atteint son but deux fois sur trois, celle des polytechniciens seulement une fois sur sept.

1) Calculer la probabilité que la route projetée atteigne son but.

2) La route atteignant son but, calculer la probabilité qu'elle ait été tracée par l'âne.

3) La route n'atteignant pas son but, calculer la probabilité qu'elle ait été tracée par les polytechniciens.

Ex15 : Le Bureau des Élèves de l'École des Ingénieux de Périgueux organise son gala annuel. Celui-ci a lieu dans un château qui comporte de nombreuses pièces dont une salle de bal.

Séverine est la présidente du BDE. Elle passe 80% de son temps dans la salle de bal.

1) Léa est une élève lambda. On estime que les informations qu'elle fournit sont fiables 7 fois sur 10. Quelle est la probabilité que Léa affirme que Séverine est dans la salle de bal ?

[Attention : il y a deux situations disjointes où Léa peut affirmer ceci.]

2) Si Léa a affirmé que Séverine est dans la salle de bal, quelle est la probabilité que Séverine y soit effectivement ?

3) Ça se complique : Benoît est un élève beta mais ses informations sont fiables 9 fois sur 10. Si Léa affirme que Séverine est dans la salle de bal et que Benoît affirme qu'elle n'y est pas, quelle est la probabilité qu'elle y soit ?

Ex16: On sait que dans un lot de 100 dés, 25 sont truqués : les dés truqués possèdent trois faces portant le chiffre 6.

On choisit un dé au hasard, on le lance… et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit truqué?

Formule des probabilités totales :

Ex17 :Soit $n \geq 2$. Une urne $\mathcal{U}_1$ contient $n-1$ jetons numérotés de 2 à n. Une deuxième urne $\mathcal{U}_2$ contient n boules : 2 blanches et $n-2$ noires. On tire au hasard un jeton dans $\mathcal{U}_1$. Si son numéro est k, on prélève simultanément k boules dans $\mathcal{U}_2$.

1) Pour $k \in [2,n]$, on définit l'événement A_k="on a tiré le k° jeton dans $\mathcal{U}_1$" .

Vérifier que $(A_2, A_3, ..., A_n)$ est un système complet d'événements.

2) En supposant que le jeton numéro k ait été tiré dans $\mathcal{U}_1$, calculer la probabilité que les 2 boules blanches soient parmi les boules prélevées dans $\mathcal{U}_2$.

3) Calculer la probabilité que les 2 boules blanches soient parmi les boules prélevées dans $\mathcal{U}_2$.

Ex18 :Soit n un entier strictement positif. La méchante reine a disposé devant Blanche-Neige $n+1$ boîtes numérotées de 0 à n. Toutes les boîtes contiennent n pommes. La boîte numéro k contient k pommes saines et $n-k$ pommes empoisonnées.

Évidemment la méchante reine n'explique pas tous ces détails à Blanche-Neige. Elle lui demande de choisir une boîte au hasard, de prendre une pomme dans cette boîte et de croquer dedans. Suspense... Quelle est la probabilité que Blanche-Neige s'en sorte ?

[Variante : Blanche-Neige prend 2 pommes d'un coup dans la boîte.]

Ex19 :Dans une boîte contenant n jetons numérotés de 1 à n, on en prélève q avec remise.

On considère ces événements :

- E = « le jeton obtenu au dernier tirage a un numéro supérieur ou égal aux précédents ».
- pour $1 \leq k \leq n$, N_k = « le jeton obtenu au dernier tirage a le numéro k ».

1) Choisir un univers Ω et donner $Card(\Omega)$.

2) Trouver un système complet d'événements de Ω.

3) Calculer la probabilité $P(E \cap N_k)$. En déduire $P(E)$ sous forme d'une somme.

4) Cas particulier q=2 : vérifier que $P(E) = \dfrac{n+1}{2n}$.

Suites de probabilités :

Ex20 :Deux pièces A et B sont disposées de la manière suivante : A communique avec B et B ouvre sur l'extérieur.

Une guêpe se trouve à l'instant $t=0$ dans la pièce A. Son trajet obéit aux règles suivantes :

- lorsqu'elle est dans la pièce A à l'instant $t=n$, alors à l'instant $t=n+1$ il y a une chance sur 3 qu'elle soit restée en A et deux chances sur 3 qu'elle soit passée en B ;

- lorsqu'elle est dans la pièce B à l'instant $t=n$, alors à l'instant $t=n+1$ il y a une chance sur deux qu'elle soit encore en B, une chance sur 4 qu'elle soit revenue en A et une chance sur 4 qu'elle soit allée à l'extérieur ;

- lorsqu'elle est à l'extérieur, elle y reste.

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement : "la guêpe est en A à l'instant t=n", B_n l'événement : "la guêpe est en B à l'instant t=n", D_n l'événement: "la guêpe est à l'extérieur à l'instant t=n". On définit en outre S_n : "la guêpe passe à l'extérieur entre les instants t=n et t=n+1".

Les probabilités de A_n, B_n, D_n et S_n sont notées respectivement a_n, b_n, d_n et s_n.

1) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2) Vérifier que, pour tout $n \geq 1$, $b_n = 2a_n$.

3) Toujours pour $n \geq 1$, calculer a_n et b_n en fonction de n. En déduire d_n en fonction de n.

4) Calculer s_n pour $n \geq 2$.

Ex21 **:**Le prof de maths est distrait. Quand il part travailler, il descend la poubelle mais il oublie parfois de la déposer au passage et la garde à la main pour venir au lycée. Quand il a voyagé un jour avec sa poubelle, il voyage une fois sur deux sans elle le lendemain. Par contre, s'il a voyagé un jour sans sa poubelle, il y a une chance sur trois qu'il l'emmène le jour suivant.

On suppose que le jour de la rentrée, premier jour de notre étude, il a voyagé sans sa poubelle. On note p_n la probabilité qu'il voyage avec sa poubelle le n° jour.

1) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

2) Calculer p_n en fonction de n. En, déduire $\lim p_n$.

Suites d'événements :

Ex22 : Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements quasi-impossibles d'un espace probabilisé (Ω, T, P).

Montrer en utilisant la propriété de sous-additivité que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est quasi-impossible.

Ex23 : Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements mutuellement indépendants et quasi-certains d'un espace probabilisé. Pour tout $n \geq 0$, on pose $B_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$.

Montrer que $(B_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante d'événements. Prouver que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$

En déduire que l'événement $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ est quasi-certain.

Ex24 : Un chapeau contient initialement un pigeon. On dispose par ailleurs d'une réserve infinie de lapins. L'expérience consiste à lancer un dé de manière répétée. Les lancers sont indépendants. À chaque fois qu'on obtient 1, 2, 3, 4 ou 5, on ajoute un lapin dans le chapeau et on relance le dé. Quand on obtient 6, on sort au hasard un animal du chapeau et l'expérience s'arrête.

Pour $k \geq 1$, on note A_k l'événement "le k° lancer ne donne pas 6" et B l'événement "l'expérience continue indéfiniment".

1) Donner la probabilité de A_k, pour tout $k \geq 1$, puis celle de $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $P(B) = 0$.

2) a) Calculer la probabilité que l'expérience s'arrête au k° tirage et que l'animal sorti du chapeau soit le pigeon. En déduire sous forme d'une sommation la probabilité de sortir le pigeon.

b) On admet le développement en série entière : $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Calculer la sommation écrite au a).