Les formules de la quinzaine :

Quinzaine 1 :

① $\forall a \in \mathbb{R}_*^+, \forall b \in \mathbb{R},\ a^b = e^{b.\ln a}$

② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, ce qui équivaut à : $\sin x \underset{0}{\sim} x$

③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, ce qui équivaut à : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

Quinzaine 2 :

① Pour tout réel α, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$

② Pour tout complexe a, la série $\sum a^n$ converge ssi $|a|<1$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$

③ Pour tout réel x, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$

Quinzaine 3 :

① $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

② $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

③ Pour toute fonction f intégrable sur $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$, $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

Quinzaine 4 :

Soit E un K-espace vectoriel, où K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

① Si (H) : $AX = 0$ est un système homogène, de p équations linéaires à n inconnues, et de rang r, l'ensemble des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de K^n de dimension $n-r$.

② $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E),\ g\circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$

③ Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M(f)_{\mathcal{B}}$.

Alors : $rg(f) = dim(Im f) = rg(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) = rg(A)$

Quinzaine 5 :

① $det(AB) = det(A).det(B)$, $Tr(AB) = Tr(BA)$,

② $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, ${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA$

③ Si f est un endomorphisme d'un espace E de dimension finie, $dim(Ker f) + dim(Im f) = dim E$

Quinzaine 6 :

① $\forall u \in E, \forall \lambda \in K,\ u \in Ker(f - \lambda Id_E) \Leftrightarrow f(u) = \lambda u$

② $\forall X \in \mathbb{C}, \forall \theta \in \mathbb{R},\ X^2 - 2X\cos\theta + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$

③ Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont la liste des valeurs propres complexes est $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$,

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ et } det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Quinzaine 7 :

① $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

② $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{C},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$

③ Le nombre de listes de k éléments choisis parmi n et le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal k dans un ensemble de cardinal n sont tous deux égaux à n^k

Le nombre de listes sans répétition de k éléments choisis parmi n et le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal k dans un ensemble de cardinal n sont tous deux égaux à $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Quinzaine 8 :

① $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sin x \leq x$

② $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leq |x|$

③ $\forall x \in]-1, +\infty[,\ ln(1+x) \leq x$

Quinzaine 9 :

① $\forall z \in D(0,1)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n.z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$

② $\forall\ x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -ln(1-x)$

③ Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

On note $R = Min(R_a, R_b)$ et, pour tout $n \geq 0$, on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Alors, pour $|z| < R$, $\sum c_n z^n$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

Quinzaine 10 : Pause pour cause de mémorisation des démonstrations du cours sur les variables aléatoires.

Quinzaine 11 :

① $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

② Soit $\omega > 0$. L'équation différentielle $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ a pour solution générale réelle :

$$y(x) = C_1 cos(\omega x) + C_2 sin(\omega x).$$

③ $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\left||z|-|z'|\right| \leq |z+z'| \leq |z|+|z'|$ et $\left||z|-|z'|\right| \leq |z-z'| \leq |z|+|z'|$

Quinzaine 12 :

① Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E. Soient $u\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $v\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Si on pose $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $(u|v)={}^tX.Y$ et $\|u\|^2={}^tX.X$.

② Si F est un sous-espace vectoriel de E, de base orthonormée $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_q)$, pour tout vecteur u de E, la projection orthogonale de u sur F est : $p(u)=\sum_{i=1}^{q}(u|\varepsilon_i)\varepsilon_i$

③ Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.
Soit f un endomorphisme de E et M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
Alors : - f est une isométrie vectorielle si et seulement si ${}^tM=M^{-1}$,
- f est un endomorphisme symétrique si et seulement si ${}^tM=M$,
- f est une symétrie si et seulement si $M=M^{-1}$.