INTEGRALES SIMPLES ET GENERALISEES

Intégrales simples :

Ex1: Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

a) $\int x.sin(x^2)\,dx$ b) $\int Arc\sin x.dx$ c) $\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}dx$ d) $\int x.sin^2 x\,dx$

e) $\int \frac{dx}{tan^3 x}$ [poser $t = sin\,x$] f) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$ g) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$ h) $\int_0^\pi \frac{sin^3 x}{1+cos^2 x}dx$ [poser $t = cos\,x$]

i) $\int x^3.e^{(x^2)}dx$ j) $\int (Arc\sin x)^2 dx$ k) $\int ln(1+\sqrt{x})\,dx$ l) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ $(x > 0)$

Ex2 : 1) Calculer grâce à une intégration par parties $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$.

2) Calculer grâce à un changement de variables $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ et $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}$.

$\boxed{\textbf{Ex3}}$ **:** Soient p et q deux entiers strictement positifs et $I(p,q) = \int_0^{2\pi} cos(p\theta).cos(q\theta).d\theta$.

1) Montrer que, pour $p \neq q$, $I(p,q) = 0$.

2) Calculer $I(p,p)$.

Ex4 : Montrer grâce à une intégration par parties que : $\int_e^x ln(ln\,t).dt \underset{+\infty}{\sim} x.ln(ln\,x)$

Ex5: Soit $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n.\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)} t^{n-1}.f(t^n).dt = \int_1^e f(t).dt$$

Ex6 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, avec $a < b$.

1) Démontrer que : $\forall x \in [a,b]$, $\int_a^x \frac{t-a}{b-a} f'(t)\,dt = \frac{x-a}{b-a} f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^x f(t)dt$

2) Démontrer que : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt + \int_a^x \frac{t-a}{b-a} f'(t)\,dt + \int_x^b \frac{t-b}{b-a} f'(t)\,dt$

3) Démontrer que : $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq \int_a^b |f'(t)|dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|dt$

Ex7 : Dans cet exercice, x est un nombre réel et n est un entier positif ou nul.

1) Justifier la convergence absolue de la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$. Que vaut donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$?

2) On pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^{tx} dt$. Prouver que $0 \leq I_n(x) \leq \dfrac{e^{|x|}}{n+1}$

3) Établir l'égalité : $I_n(x) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{x}{n+1} I_{n+1}(x)$

4) En déduire la formule : $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x)$

5) Prouver que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$

Ex8 : • <u>1° calcul préliminaire</u> – Prouver que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \sin t \geq \dfrac{2t}{\pi}$

• <u>2° calcul préliminaire</u> – Prouver que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(n.t)| \leq n.|\sin t|$

• <u>Application</u> – En considérant séparément chacune des deux intégrales

$\displaystyle\int_0^{\pi/2n} t.\left(\frac{\sin(n.t)}{\sin t}\right)^4 dt$ et $\displaystyle\int_{\pi/2n}^{\pi/2} t.\left(\frac{\sin(n.t)}{\sin t}\right)^4 dt$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t.\left(\frac{\sin(n.t)}{\sin t}\right)^4 dt \leq \frac{\pi^2 n^2}{4}$

Comparaison d'une série et d'une intégrale généralisée :

Ex9 : 1) Soit $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante. Montrer que :

$$\forall p \geq 2,\ \int_p^{p+1} f(t)dt \leq f(p) \leq \int_{p-1}^{p} f(t)dt$$

2) Justifier l'existence pour tout entier $n \geq 1$ de $R_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

3) En utilisant 1), donner pour R_n un encadrement, puis montrer que $R_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Ex10 : 1) On considère sur $\mathbb{R}_*^+$ la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$.

a) Déterminer l' entier naturel N tel que φ soit décroissante sur $[N,+\infty)$.

b) En déduire que : $\forall k \geq N+1,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \varphi(t)dt \leq \frac{\ln k}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt \quad (*)$

2) Pour $n > 0$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k^2}$

a) À partir de (*), montrer que : $\forall n \geq N+1,\ \frac{\ln 2}{4} + \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n \leq \frac{\ln 2}{4} + \int_2^{n} \frac{\ln x}{x^2} dx$

b) En déduire que la suite (S_n) est majorée par $\frac{3\ln 2}{4} + \frac{1}{2}$.

c) En déduire la convergence de la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ et un encadrement de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

3) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge-t-elle ?

Ex11 : 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de l'intégrale généralisée $\int_0^n (\ln(2x))^2 dx$ et la calculer.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(2k))^2$. Établir que : $\int_0^n (\ln(2x))^2 dx \leq S_n \leq \int_1^{n+1} (\ln(2x))^2 dx$

3) En déduire après une justification soigneuse que : $S_n \underset{+\infty}{\sim} n(\ln n)^2$

Suites et séries dont le terme général est une intégrale (simple ou généralisée) :

Ex12 : Pour tout entier naturel *n*, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

1) En utilisant un théorème de comparaison de suites, montrer que : $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$. En déduire que : $I_n \sim \frac{\ln 2}{n}$

3) Déterminer le sens de variation de (I_n).

Ex13 : Démontrer que, pour tout entier *n* positif, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.

Ex14 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n dx$. On rappelle que $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$.

1) En utilisant le fait que $0 \leq \tan x \leq 1$ pour $x \in \left[0, \pi/4\right]$, démontrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et convergente.

2) En remarquant que $I_n + I_{n+2}$ a une primitive évidente (si, si !), prouver que $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n).

3) En utilisant à la fois 1) et 2), montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

4) Démontrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$.

5) Justifier l'égalité : $\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{t^{2n}}{1+t^2} = (-1)^n . \left(\dfrac{1}{1+t^2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{2k} \right)$

6) En déduire l'égalité : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}}$

$\boxed{\textbf{Ex15}}$ **:**Soit *f* une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant $f(1) \neq 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t).dt$. On rappelle le théorème suivant :

Toute fonction définie et continue sur un segment est bornée.

1) En déduire l'existence d'un nombre réel M tel que : $\forall t \in [0,1],\ |f'(t)| \leq M$, puis montrer par une majoration <u>soigneuse</u> que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{n+1} f'(t).dt = 0$

2) En déduire que : $I_n = \dfrac{f(1)}{n+1} + \circ\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ et donner la nature de la série $\sum I_n$.

Sommes de Riemann :

Ex16 : Soit α un réel non nul. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k\alpha}{n}}$.

1) Montrer que u_n est une somme de Riemann. En déduire la limite de u_n.

2) u_n est aussi une somme géométrique. (Re)calculer la limite de u_n.

Ex17 : Pour $(\alpha, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $S_n(\alpha) = 1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha + n^\alpha$.

1) Lorsque $\alpha \in \{0,1,2\}$, donner $S_n(\alpha)$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\alpha)}{n^{\alpha+1}}$.

2) α étant de nouveau un entier quelconque, montrer que $\dfrac{S_n(\alpha)}{n^{\alpha+1}}$ est une somme de Riemann et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Intégrales généralisées de fonctions de signe constant :

Ex18 : Déterminer la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}.\sin t}$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t^2)}$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}}dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} Arctan\left(\frac{1}{\tan t}\right).dt$ g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$ h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$ i) $\displaystyle\int_0^1 \sin t.\ln t\,dt$ j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}dx$

Ex19 : Prouver que les intégrales suivantes convergent et calculer leur valeur :

a) $\displaystyle\int_0^1 t^2 \ln t.dt$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$ c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{Arc\tan x}{x^2}dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$

Ex20 : 1) Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et calculer sa valeur.

2) En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Ex21 : 1) Démontrer que la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est intégrable sur $\left]0,\pi/2\right]$. En déduire grâce à un changement de variable que $x \mapsto \ln(\cos x)$ est intégrable sur $\left[0,\pi/2\right[$

2) On note $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x).dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x).dx$. Montrer que $I = J$, puis exprimer astucieusement $I + J$. En déduire les valeurs exactes de *I* et *J*.

Ex22: Déterminer la nature des intégrales suivantes en discutant selon les valeurs des paramètres réels α et β : a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\alpha)}$ $[\alpha > 0]$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^\alpha}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}dx$

Ex23 : Pour *a* et *b* deux réels vérifiant $a < b$, on pose $I(a,b) = \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

1) Justifier que $I(a,b)$ est une intégrale convergente.

2) On effectue dans $I(a,b)$ le changement de variable $t = \dfrac{x-a}{b-x}$. Calculer *x* en fonction de *t*, puis montrer que $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}}$. Calculer alors la valeur exacte de $I(a,b)$.

Intégrales absolument convergentes – intégrales s'y ramenant par intégration par parties et/ou changement de variable – intégrales étudiées par comparaison avec une série :

Ex24 : Montrer que $\int_0^1 sin\left(\frac{1}{t}\right).ln\,t\,dt$ est une intégrale absolument convergente.

Ex25 :1) Justifier la convergence de $\int_0^1 \frac{cos\,t}{\sqrt{t}}dt$.

2) Pour $X > 1$, on pose $F(X) = \int_1^X \frac{cos\,t}{\sqrt{t}}dt$. Exprimer $F(X)$ en fonction de $\int_1^X \frac{sin\,t}{t\sqrt{t}}dt$.

Après avoir justifié la convergence absolue de $\int_1^{+\infty} \frac{sin\,t}{t\sqrt{t}}dt$, prouver que $\int_1^{+\infty} \frac{cos\,t}{\sqrt{t}}dt$ converge.

3) Démontrer que $\int_0^{+\infty} cos(x^2)dx$ converge.

Ex26 : Pour tout α réel, on définit la fonction f_α: ℝ→ℝ par : $f_\alpha(x) = \frac{sin\,x}{x^\alpha}$

1) Vérifier que l'intégrale $\int_0^1 \frac{sin\,x}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha < 2$.

2) Montrer que, pour $\alpha > 1$, f_α est intégrable sur $[1,+\infty)$.

3) On suppose maintenant $\alpha \leq 1$. Pour tout entier $k \geq 0$, on pose $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{sin\,x}{x^\alpha}dx$

a) Montrer par un changement de variable que $u_k = (-1)^k a_k$, où a_k est une intégrale positive de bornes 0 et π.

b) Si $\alpha \leq 0$, montrer que la série $\sum u_k$ diverge grossièrement.

c) Si $0 < \alpha < 1$, montrer que $\sum u_k$ est une série alternée convergente.

4) En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{sin\,x}{x^\alpha}dx$ pour $\alpha \leq 0$ et $0 < \alpha < 1$.

Pour quelles valeurs de α l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{sin\,x}{x^\alpha}dx$ converge-t-elle ?

Intégrales (simples ou généralisées) fonction des bornes :

***<u>Théorème fondamental de l'intégration</u>* :**

> Si φ est une fonction continue sur un intervalle I et si $a \in I$, la fonction Φ définie par $\Phi(x)=\int_a^x \varphi(t)\,dt$ est de classe C^1 sur I et : $\forall x \in I$, $\Phi'(x)=\varphi(x)$.

<u>Remarque</u> : *$\int_a^x \varphi(t)dt$ est ici une intégrale simple. Le théorème reste vrai si a est une extrémité de I et si $\int_a^x \varphi(t)dt$ est une intégrale généralisée convergente.*

Ex27 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $g(x)=f(x).\int_0^x f(t)dt$ et on suppose que la fonction g ainsi définie est décroissante sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer le tableau des variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $G : x \mapsto \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$.

2) Démontrer que les fonctions G et f sont nulles sur $\mathbb{R}$.

Ex28 : On veut étudier la fonction F définie par $F(x)=\int_x^{2x}\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}dt$, sachant qu'on ne connaît pas de formule pour exprimer les primitives de $\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}$ et qu'il faut donc se débrouiller sans…

1) a) Justifier que $F(x)$ est bien définie pour $x>0$ et pour $x<0$.

b) Justifier que la fonction $f : t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0. En déduire que F peut aussi être définie en 0 et donner la valeur de $F(0)$.

2) Grâce au changement de variable $u=-t$, prouver que F est une fonction impaire.

3) Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'(x)=\frac{\operatorname{Arctan}(2x)-\operatorname{Arctan} x}{x}$. En déduire le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_*^+$.

4) Pour $x>0$ et $x \le t \le 2x$, vérifier que : $\operatorname{Arctan} x \le \operatorname{Arctan} t \le \operatorname{Arctan}(2x)$. En déduire un encadrement de $F(x)$, puis la limite de F en $+\infty$.

5) <u>Rappel</u> *:* on a le droit de primitiver terme à terme un développement limité, c'est-à-dire :

> Si $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\circ(x^n)$ et si Φ est une primitive de φ, alors :
> $$\Phi(x)=\Phi(0)+a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\ldots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\circ\left(x^{n+1}\right)$$

Application : à partir du développement limité de $\dfrac{Arc\tan x}{x}$ en 0 à l'ordre 3, calculer le développement limité de $F(x)$ en 0 à l'ordre 4.

6) Dessiner le graphe de *F*, en faisant bien apparaître les asymptotes trouvées au 4), ainsi que la pente de la tangente à l'origine et la position du graphe par rapport à cette tangente, qu'on peut déterminer grâce au 5).

Ex29 : Soient *A* un nombre réel strictement positif et *f* : $[0,A] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose en outre que *f* est dérivable en 0.

Pour tout *x* appartenant à $[0,A]$, on pose $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

1) En utilisant les propriétés de *F*, calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ en fonction de *f*.

2) Justifier l'existence du développement limité de *F* en 0 à l'ordre 2, et le calculer.

3) On définit la fonction φ: $[0,A] \to \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(0)=f(0) \text{ et, pour } x\neq 0,\ \varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

Montrer que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

Ex30 : Soient *A* un nombre réel strictement positif et *f* : $[-A,A] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour tout *x* appartenant à $[-A,A]$, on pose $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ et $G(x)=\int_0^x F(t)dt$.

Exprimer $\dfrac{1}{x^2}\int_0^x t.f(t)dt$ en fonction de $F(x)$ et $G(x)$ et calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\int_0^x t.f(t)dt$.

Ex31 :1) On a vu à l'exercice 18.c que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 t}{t^2}dt$ converge. Grâce à une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 t}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}dt$.

2) Pour tout réel *x* positif, on pose $f(x)=\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}dt$. Que vaut $\lim_{x\to +\infty} f(x)$?

Montrer grâce à deux IPP que, au voisinage de +∞, $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Ex32 : Soit $f(x)=\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

1) Justifier que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que : $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt - x+\frac{x^3}{3}+\circ\left(x^4\right)$

3) Dans cette question, $x>0$.

a) Montrer que : $\int_x^{+\infty} t.e^{-t^2}\,dt=\frac{e^{-x^2}}{2}$

b) Montrer que : $f(x)=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt$

c) En déduire deux résultats : i) $f(x)\leq\frac{e^{-x^2}}{2x}$ ii) $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e^{-x^2}}{2x}$ [Pour ii) , utiliser la remarque toute bête que, lorsque $t\in[x,+\infty[$, on a $t\geq x$, ainsi que le résultat de a).]

Ex33 : Soit f: $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue qui vérifie : $\forall x\in\mathbb{R}^+, f(x)\leq k.\int_0^x f(t)\,dt$, où $k>0$

1) On pose $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ g'(x)\leq k.g(x)$

En déduire le sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x\to e^{-kx}.g(x)$.

2) Montrer successivement : $g(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ et : $g(x)\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$

Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

Ex34 : Soit f : $[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, continue. Pour $x\in[1,+\infty[$, on note $I(x)=\int_1^x\frac{f(2t)-f(t)}{t}\,dt$.

1) Prouver que : $I(x)=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_1^2\frac{f(t)}{t}\,dt$

2) On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ converge. Justifier alors que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(2t)-f(t)}{t}\,dt$ converge et que $\int_1^{+\infty}\frac{f(2t)-f(t)}{t}\,dt+\int_1^2\frac{f(t)}{t}\,dt=0$.

Ex35 : On pose $\varphi(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$ et $f(x)=\int_0^x \varphi(t)dt$.

1) Montrer que la fonction φ est prolongeable par continuité en 0.
En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer le sens de variation de f.

3) Calculer en 0 le développement limité de φ à l'ordre 1, puis de f à l'ordre 2.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. [Partir de la minoration : $\forall x>0,\ \forall t\in[0,x],\ \dfrac{1}{t}\geq\dfrac{1}{x}$]

5) Dessiner le graphe de f sur $\mathbb{R}^+$.

Ex36 : Soit f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $[1,+\infty)$.

On définit la fonction F: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)dt$. Montrer que les fonctions $x\to\dfrac{f(x)}{x}$ et $x\to\dfrac{F(x)}{x^2}$ sont intégrables sur $[1,+\infty)$ et que : $\int_1^{+\infty}\dfrac{F(x)}{x^2}dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}dx$

Ex37 :1) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 sin\left(\dfrac{1}{t}\right)dt$ converge.

2) Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} sin\left(\dfrac{1}{t}\right)dt$?

3) On pose $f(x)=\int_0^x sin\left(\dfrac{1}{t}\right).dt$.

a) Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

b) Prouver que f est croissante sur $[1,+\infty[$. Quelle est sa limite en $+\infty$?

c) Prouver que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$. On pose $f(0)=0$ dans la suite de l'exercice.

4) a) Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\ f(x)=x^2 cos\left(\dfrac{1}{x}\right)-2\int_0^x t\,cos\left(\dfrac{1}{t}\right)dt$

b) En déduire que $|f(x)|\leq 2x^2$, puis que f est dérivable en 0. Donner $f'(0)$.

5) On admet l'encadrement suivant : $\forall u\in\mathbb{R}^+,\ u-\dfrac{u^3}{6}\leq sin\,u\leq u$.

En déduire un équivalent simple de $\int_1^x sin\left(\dfrac{1}{t}\right).dt$, puis de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.