INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE

Intégrales généralisées sur un intervalle non borné :

Ex1 : 1) Pour $t \in]0,+\infty[$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(t,x) = \dfrac{Arctan(tx)}{t(1+t^2)}$. Justifier que la fonction $t \to f(t,x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et donner, lorsque $x > 0$, un équivalent simple de $f(t,x)$ pour $t \to 0$ et $t \to +\infty$. En déduire que l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{Arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$ converge.

$\to$ *Les considérations précédentes permettent de définir la fonction F sur* $\mathbb{R}^+$.

2) a) Soit A un réel strictement positif quelconque. Montrer que F est continue sur $[0,A]$.

b) Expliquer pourquoi F est continue sur $\mathbb{R}^+$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$.

3) Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'expression de $F'(x)$.

4) Vérifier, pour $x \neq 1$, la décomposition : $\dfrac{1}{(1+t^2).(1+t^2x^2)} = \dfrac{1}{x^2-1} \cdot \left(\dfrac{x^2}{1+t^2x^2} - \dfrac{1}{1+t^2} \right)$

En déduire que : $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ F'(x) = \dfrac{\pi}{2(x+1)}$

5) Calculer une expression simple de $F(x)$ pour $x \in]0,1[$ et pour $x \in]1,+\infty[$ [*Attention : ce n'est a priori pas exactement la même*]. En déduire une expression de $F(x)$ valable sur $\mathbb{R}^+$.

Ex2 : [CCP PC 2017 ; merci à Romain B.]

1) Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. En déduire que, pour tout réel *x*, la fonction $\varphi_x : t \mapsto e^{ixt} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et établir la relation ($\mathcal{R}$) : $\forall x \in \mathbb{R},\quad 2(x+i)F'(x) + F(x) = 0$.

3) ($\mathcal{R}$) signifie que $y = F(x)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \quad y' + a(x)y = 0, \text{ où } a(x) = \frac{1}{2(x+i)}.$$

Calculer $Re(a(x))$ et $Im(a(x))$. En déduire une primitive $A(x)$ de $a(x)$, puis une expression de $F(x)$. [*On pourra admettre que* $F(0) = \sqrt{\pi}$ *(cf. exercice 3)*.]

Ex3 : 1) On pose $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$. Démontrer que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) Démontrer que, pour tout $x\geq 0$, $0\leq F(x)\leq \frac{\pi}{2}e^{-x}$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

3) Justifier la convergence de $\Delta=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$ et $\Omega=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}dv$, puis établir que $\Omega=2\Delta$.

4) Soit a un réel fixé, strictement positif. Montrer que F est dérivable sur $[a,+\infty)$, expliquer pourquoi F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et prouver que, pour tout $x>0$, $F'(x)=-e^{-x}\frac{\Delta}{\sqrt{x}}$.

5) Établir que : $\forall x>0,\ \ F(x)=\frac{\pi}{2}-\Delta.\int_0^x\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}dv$. En utilisant alors 2) et 3), prouver que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

(intégrale de Gauss)

• *Dans les exercices 4 et 5, on utilisera la valeur de l'intégrale de Gauss.*

Ex4 : Pour x réel quelconque, on pose $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}.e^{2i\pi tx}dt$.

1) Démontrer que F est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer par une intégration par parties que : $F'(x)=-2\pi^2xF(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

3) Par une résolution d'équation différentielle, montrer que : $F(x)=\sqrt{\pi}.e^{-\pi^2x^2}$

Ex5 : 1) Montrer que la fonction ϕ, définie par $\phi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}dt$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$ et donner l'expression de $\phi'(x)$.

2) Calculer une expression simple de $\phi'(x)$ pour $x>0$, puis de $\phi(x)$ pour $x\geq 0$.

Ex6 : Soit f une fonction réelle, continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On pose $F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)dt$.

1) Démontrer que F est définie pour tout $x\geq 0$.

2) Pouvez-vous prouver que F est continue sur $\mathbb{R}^+$?

3) Pouvez-vous prouver que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$? A défaut, pouvez-vous prouver que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$?

4) On ne suppose plus que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, mais on suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est une intégrale convergente. Vous rappelez-vous la différence entre ces deux hypothèses ?

Montrer alors, grâce à une intégration par parties, que F est définie pour tout $x > 0$.

Ex7 : Soit f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$.

1) Démontrer que F est définie pour tout $x > 0$.

2) Démontrer par récurrence que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$.

Ex8 : Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on définit sur $]1,+\infty[$ la fonction $g_x : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}$.

1) Prouver que la fonction $F : x \mapsto \int_1^{+\infty} g_x(t)\, dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

2) Prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

On se propose maintenant de calculer la limite de F en $+\infty$ en utilisant le théorème suivant dit de **caractérisation séquentielle de la limite**, où $\ell \in \{\mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$:

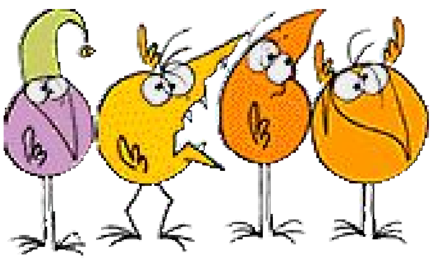
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ell \iff \text{pour toute suite } (x_n) \text{ tendant vers } +\infty, \text{ la suite } \left(F(x_n)\right) \text{ tend vers } \ell.}$$

3) Soit donc $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle tendant vers $+\infty$.

a) Justifier qu'il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $x_n \geq 1$. Pour tout $n \geq n_0$, on pose alors $f_n = g_{x_n}$, c'est-à-dire $f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{\sqrt{t^2 - 1}}$, $\forall t \in]1,+\infty[$.

b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ vers la fonction nulle.

c) En appliquant à la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ le théorème de convergence dominée vu en début d'année, montrer que $\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = 0$. Conclure.



Intégrales généralisées sur un intervalle borné :

Ex9 : 1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Justifier que la fonction $t \mapsto t^{x-t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

2) On pose $F(x) = \int_0^1 t^{x-t} dt$. Montrer que la fonction *F* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrer que *F* est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et que : $\forall k \in \mathbb{N},\ F^{(k)}(x) = \int_0^1 (\ln t)^k . t^{x-t} dt$

Ex10 : 1) Justifier l'existence de la fonction $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $U(x) = \int_0^1 \frac{\sin^2(xt)}{t^2} dt$

2) Soit $a > 0$. Montrer que *U* est de classe C^2 sur $[-a,a]$.

3) Justifier que *U* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression simple de $U''(x)$.

Ex11 : Pour *x* et *t* réels, on pose $f(x,t) = \frac{\ln(1+xt)}{t(1+t)}$.

1) Déterminer le domaine de définition *D* de *f*. [*D* est une partie de $\mathbb{R}^2$.]

2) On pose $F(x) = \int_0^1 f(x,t) dt$. Prouver que *F* est définie sur $]-1,+\infty[$.

3) Démontrer que *F* est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$. En déduire le sens de variation de *F*.

4) Soit $x \neq 1$ fixé. Déterminer deux réels a_x et b_x tels que, pour tout *t* vérifiant $(x,t) \in D$, on ait : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{a_x}{1+xt} + \frac{b_x}{1+t}$. En déduire une expression intégrée de $F'(x)$

5) En utilisant le changement de variable $u = xt$, montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

Ex12 : 1) Démontrer que la fonction $f : x \to \int_0^{\pi/2} \mathrm{Arctan}(x \tan\theta) d\theta$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

2) On rappelle l'identité : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(1/x\right) = \frac{\pi}{2}}$ (*qu'on prouve comment, déjà ?*)

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) + f\left(1/x\right) = \frac{\pi^2}{4}$. En déduire la limite de *f* en $+\infty$.

Intégrales simples :

Ex13 : Démontrer que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{ln(1+xt)}{1+t^2}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'expression intégrale de $F'(x)$.

Ex14 : Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} ln\left(1 + x.sin^2 t\right).dt$.

1) Montrer que F est continue sur $[0, A]$, $\forall A > 0$. Justifier que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $F'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{sin^2 t}{1 + x.sin^2 t} dt$.

3) a) En posant $u = tan\, t$, établir l'égalité : $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)(1+(1+x)u^2)} du$

b) Calculer deux coefficients α et β indépendants de t tels que :

$$\frac{u^2}{(1+u^2)(1+(1+x)u^2)} = \frac{\alpha}{1+u^2} + \frac{\beta}{1+(1+x)u^2}$$

En déduire que $F'(x) = \dfrac{\pi}{2x} - \dfrac{\pi}{2x\sqrt{1+x}}$.

4) Dériver $ln\left(1 + \sqrt{1+x}\right)$. En déduire une expression simple de $F(x)$.

Ex15 : Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et : $g(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$

1) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(x)$.

2) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donner $g'(x)$, et montrer que $g'(x) = -f'(x)$.

3) Montrer que : $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

4) Grâce à une majoration, prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

En déduire de nouveau la valeur de l'intégrale de Gauss: $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Ex16 : 1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 sin\left(xt^2\right) dt$ est de classe C^1.

2) Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^x \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$.

3) Exprimer, en fonction de *f*, la solution générale sur $\mathbb{R}_*^+$ de l'équation $y + 2xy' = \sin x$.

Ex17 : • On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt).dt$.

1) Déterminer le domaine de définition D de F

2) Étudier la continuité et la dérivabilité de F sur D et calculer $F'(x)$.

• On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(t).dt$

3) a) Grâce à un changement de variable, écrire u_n sous la forme : $u_n = (-1)^n v_n$, où v_n est une intégrale positive sur $[0, \pi]$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq \pi \dfrac{e^{-n\pi}}{\sqrt{n\pi}}$ et $v_{n+1} - v_n \leq 0$

c) En déduire que $\sum u_n$ converge.

4) a) Montrer que, pour tout réel *T*, il existe un unique entier *n* tel que $n\pi \leq T < (n+1)\pi$.

b) Montrer que : $\left| \displaystyle\int_0^T \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(t).dt - \sum_{p=0}^{n-1} u_p \right| \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{n\pi}} e^{-n\pi}$

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n = F(1)$.