ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

Produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$ ou dans un espace euclidien de dimension *n* :

• *Le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ est défini par :*

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n,\ si\ u=(x_1,x_2,...,x_n)\ et\ v=(y_1,y_2,...,y_n),\ \ u.v = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

• *La norme euclidienne associée est alors définie par :* $\|u\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

• *Pour ce produit scalaire, la base canonique $(e_1,e_2,...,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée.*

Ex1 : En utilisant astucieusement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que :

$$\forall (x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n.\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Ex2 : On pose $\varphi(u,v) = \sum_{k=1}^{n} k.x_k y_k$. Vérifier que φ est aussi un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Ex3 : Soit $\mathcal{F}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien *E* de dimension *n*.

1) Démontrer que, si $\mathcal{F}$ est base orthonormée de *E*, on a : $\boxed{\forall x \in E,\ \ x = \sum_{i=1}^{n} \left(x \middle| \varepsilon_i\right).\varepsilon_i}$ (*)

2) Réciproquement, on suppose que (*) est vérifiée.

a) Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de *E*.

b) En appliquant (*) avec $x = \varepsilon_k$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, prouver que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de *E*.

Produit scalaire de fonctions :

Ex4 : Soit *E* l'espace vectoriel des applications continues et bornées de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1) Pour *f* et *g* appartenant à *E*, prouver que $\int_0^{+\infty} f(x).g(x)e^{-x}\,dx$ converge absolument.

2) On pose $\varphi(f,g) = \int_0^{+\infty} f(x).g(x)e^{-x}\,dx$. Montrer que φ est un produit scalaire sur *E*.

3) On considère dans *E* le sous-espace vectoriel $F = \{f \in E \ /\ f(0) = 0\}$.

Soit $g \in F^\perp$. On définit l'application $f_g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par : $f_g(x) = \begin{cases} x.g(x) \text{ si } x \in [0,1[\\ g(x) \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

Justifier que $f_g \in F$ et que $\varphi(f_g, g) = 0$. En déduire que $F^\perp = \{0_E\}$.

Produits scalaires de polynômes :

Ex5 : Dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}_n[X]$, lorsque $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X)=\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ sont deux polynômes quelconques, on pose : $\psi(P,Q)=\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$

1) Montrer que ψ est un produit scalaire dans *E*. On note ensuite $\psi(P,Q)=\langle P|Q\rangle$

2) On suppose dans cette question $n=2$ et on pose $P_0(X)=1$.

a) Calculer un polynôme P_1 de degré 1 tel que $\langle P_1|P_1\rangle=1$ et $\langle P_0|P_1\rangle=0$.

b) Calculer un polynôme P_2 de degré 2 tel que la famille (P_0,P_1,P_2) soit une base orthonormée de *E* muni du produit scalaire ψ.

Ex6 : Dans $E=\mathbb{R}_2[X]$, on considère le produit scalaire défini par : $(P|Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$

1) On pose $P_0(X)=1$ et $P_1(X)=\sqrt{3}(2X-1)$. Vérifier que (P_0,P_1) est une famille orthonormée de *E*.

2) Soit $F=\mathbb{R}_1[X]$. Justifier que (P_0,P_1) est une base orthonormée de *F*.

3) Vérifier que la projection orthogonale de $Q(X)=X^2$ sur *F* est $R(X)=X-1/6$.

4) En déduire la projection orthogonale de $S(X)=X^2+X$ sur *F*.

Un produit scalaire de matrices *à connaître* :

$\boxed{\textbf{Ex7}}$ **:** Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre *n*.

Etant données deux matrices $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, on pose $\varphi(A,B)=Tr({}^tA.B)$.

On rappelle la formule suivante : $AB=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, avec $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

1) Prouver que $\varphi(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{ij}$ et vérifier que φ est un produit scalaire.

On écrit alors $\left(A|B\right)_s=Tr\left({}^tA.B\right)$ et la norme associée, dite ***norme de Schur***, est notée :

$$\|A\|_s=\sqrt{Tr({}^tA.A)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\,.$$

On note $A_1, A_2, ..., A_n$ les <u>vecteurs-lignes de A</u> et $B_1, B_2, ..., B_n$ les <u>vecteurs-colonnes de B</u>.

2) Exprimer $\|A\|_s$ et $\|B\|_s$ à l'aide des normes euclidiennes dans $\mathbb{R}^n$ de ces vecteurs.

3) Montrer que, pour tous *i* et *j* appartenant à $[\![1,n]\!]$, $c_{ij}=\left(A_i|B_j\right)$.

En déduire une formule pour $\|A.B\|_s$.

4) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$, que : $\|A.B\|_s \le \|A\|_s . \|B\|_s$

Ex8: Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace euclidien muni du produit scalaire $(A|B)=Tr({}^tA.B)$ de l'exercice 7

$F=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $G=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont respectivement les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques [$A\in F \Leftrightarrow A={}^tA$] et antisymétriques [$A\in G \Leftrightarrow A=-{}^tA$].

1) Montrer que $F\perp G$.

2) Vérifier que : $\forall A\in E$, $\dfrac{A+{}^tA}{2}\in F$ et $\dfrac{A-{}^tA}{2}\in G$. En déduire que $E=F\overset{\perp}{\oplus}G$.

3) Justifier que $dim\, F=\dfrac{n(n+1)}{2}$. En déduire la dimension de *G*.

4) Soit $A\in E$. Donner les projections orthogonales de *A* sur *F* et sur *G*. En déduire que $d(A,F)^2=\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-a_{ji})^2$. Donner une expression analogue pour $d(A,G)^2$.

Projections et symétries orthogonales, isométries vectorielles, matrices orthogonales :

Ex9 : Soit $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} a & a+1 & 2 \\ a+1 & -2 & a \\ -2 & -a & a+1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les deux valeurs de *a* pour lesquelles *A* est une matrice orthogonale.

2) Pour chacune de ces deux valeurs de *a*, déterminez les valeurs propres et les sous-espaces propres de *A* et dites si *A* est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [*Attention* ! Il est inutile de calculer le polynôme caractéristique de *A* ; les seules valeurs propres <u>possibles</u> de *A* sont 1 et -1.]

Ex10 : *E* est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. *D* est la droite de vecteur directeur <u>unitaire</u> $\vec{u}_0$, dont les coordonnées sont α,β,γ.

1) Soit p la projection orthogonale sur *D*. Justifier la formule : $\forall \vec{v}\in E,\ p(\vec{v})=(\vec{u}_0|\vec{v}).\vec{u}_0$

2) En déduire la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

<u>Application</u> : *D* est la droite d'équation cartésienne $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$. Calculer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur *D* et de la symétrie orthogonale par rapport à *D*.

Ex11 : Soit *E* un espace euclidien de dimension *n* muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.

1) Soit f un endomorphisme de *E* qui est à la fois une isométrie et une symétrie par rapport à un sous-espace *F* et parallèlement à un sous-espace *G*. En utilisant les propriétés $F=Ker(f-Id)$ et $G=Ker(f+Id)$, montrer que $F\perp G$. Qu'en déduisez-vous sur f ?

2) On note A la matrice de f dans $\mathscr{B}$. Montrer que, si A est à la fois une matrice orthogonale et une matrice symétrique, alors f est une symétrie orthogonale.

3) Application : pour chacune des matrices A suivantes, vérifier que A est la matrice d'une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et calculer une base orthonormée de F et de G.

a) $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ c) $A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & 6 & -3\\ 6 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 6\end{pmatrix}$

Ex12 : Soit f une isométrie d'un espace euclidien E.

1) Démontrer que $Ker(f-Id)\perp Ker(f+Id)$.

2) Démontrer que f est diagonalisable si et seulement si $E=Ker(f-Id)\oplus Ker(f+Id)$.

3) Démontrer que les seules isométries diagonalisables sont les symétries orthogonales.

Ex13 : 1) Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E.

a) On note $W=Ker(Id-f)$ et $W'=Im(Id-f)$. Montrer que $W\perp W'$.

b) En déduire que $E=W\overset{\perp}{\oplus}W'$.

2) D'après la question 1, tout vecteur v de E s'écrit $v=u+u'$, avec $u\in W$ et $u'\in W'$.

Pour tout entier $p\geq 1$, on définit : $g_p=\frac{1}{p}(Id+f+f^2+...+f^{p-1})$.

a) Montrer que $g_p(u)=u$.

b) Justifier l'existence d'un vecteur w tel que $u'=w-f(w)$.

Montrer que $g_p(u')=\frac{w-f^p(w)}{p}$. En déduire par majoration de $\|g_p(u')\|$ que $\lim\limits_{p\to+\infty} g_p(u')=0_E$.

c) Pour tout vecteur v de E, on définit l'application g par : $g(v)=\lim\limits_{p\to+\infty} g_p(v)$. Établir que g est la projection orthogonale sur W.

Ex14 : L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique dans lequel la base canonique $\mathscr{B}$ est orthonormée. u est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et U est la matrice unicolonne des coordonnées de u dans $\mathscr{B}$. La matrice-identité d'ordre n est notée I.

On pose $H=I-2U.{}^tU$ et on appelle h l'endomorphisme de matrice H dans $\mathscr{B}$.

1) Justifier successivement que ${}^tH=H$, ${}^tU.U=1$ et $H^2=I$.

2) a) Prouver que $h(u)=-u$.

b) Soit v un vecteur quelconque orthogonal à u. Prouver que $h(v)=v$.

c) Identifier l'application h et donner ses éléments caractéristiques.

3) Soit g un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ non colinéaire au premier vecteur e_1 de $\mathcal{B}$.

a) On pose $\gamma = (e_1|g)$. Montrer que $\gamma < 1$.

b) On choisit $u = \dfrac{g - e_1}{\sqrt{2(1-\gamma)}}$. Prouver que u est unitaire. Montrer que $h(g) = e_1$.

Endomorphismes et matrices symétriques, théorème spectral :

Ex15 : Déterminer une base orthonormée de diagonalisation pour chacune des deux matrices symétriques suivantes : a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Ex16 : D'après le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle d'ordre n a une base orthonormée de diagonalisation dans $\mathbb{R}^n$.

Démontrer l'implication réciproque : toute matrice réelle d'ordre n qui a une base orthonormée de diagonalisation est symétrique.

Ex17 : Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. On suppose qu'il existe un entier $k > 0$ tel que $A^k = I_n$. En utilisant le théorème spectral, montrer que $A^2 = I_n$.

$\boxed{\textbf{Ex18}}$ **:** E est un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, et f est un endomorphisme symétrique de E vérifiant la condition : $\forall u \in E - \{0_E\},\ (f(u)|u) > 0$

1) Montrer que les valeurs propres de f sont toutes strictement positives.

2) Soit $M = M(f)_{\mathcal{B}}$.

a) Prouver, en utilisant le théorème spectral, que $Tr(M) > 0$ et $det(M) > 0$.

b) Justifier qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale Δ telles que $M = P.\Delta^2.{}^tP$. En déduire qu'il existe une matrice inversible Q telle que $M = Q.{}^tQ$.

Ex19 : Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que : $\forall x \in E,\ (x|u(x)) = 0$

1) Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x|u(y)) = -(u(x)|y)$. On dit que u est un ***endomorphisme antisymétrique***. Prouver que $E = Ker u \overset{\perp}{\oplus} Im u$.

2) Montrer que la seule valeur propre possible de u est 0. En déduire que le seul endomorphisme antisymétrique diagonalisable est l'endomorphisme nul.

Ex20 : Soit A une matrice d'ordre n à coefficients réels et $M = {}^tA.A$.

On note a l'endomorphisme de matrice A, et f l'endomorphisme de matrice M, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

1) Justifier que f est diagonalisable et qu'il admet une base orthonormée de diagonalisation.

2) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \|a(u)\|^2 = (u|f(u))$

En déduire que les valeurs propres de f sont toutes positives.

3) Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ dont les coefficients diagonaux sont positifs, et une matrice orthogonale Ω, telles que : $M = \Omega.\Delta^2.{}^t\Omega$

En déduire une matrice symétrique S telle que : $M = S^2$

4) a) Démontrer que $Kerf \subset Kera$ et $KerA \subset KerM$. Qu'en déduisez-vous ?

b) Justifier que les matrices A et M ont même rang.

5) À quelle condition portant sur M peut-on affirmer que ses valeurs propres sont toutes strictement positives ?

Petit problème donné en DS7 2018-2019 (inspiré de e3A maths B PSI 2013)

n et p sont deux entiers naturels non nuls. E est un espace euclidien de dimension n, où le produit scalaire de deux vecteurs x et y est écrit $(x|y)$.

$\mathcal{F} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ est une famille de vecteurs de E qui vérifie la propriété ($\mathcal{P}$) :

$$\forall x \in E, \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2$$

F est le sous-espace engendré par $\mathcal{F}$. On peut noter $F = Vec(\mathcal{F})$.

1. Prouver que $F^\perp = \{0_E\}$. En déduire que $n \leq p$.

2. Prouver en utilisant ($\mathcal{P}$) que, pour tout $e_i \in \mathcal{F}$, $\|e_i\| \leq 1$.

3. On suppose dans la suite du problème que $\mathcal{F}$ est libre. Justifier que $n = p$ et que $\mathcal{F}$ est une base de E.

4. Démontrer l'identité suivante : $\forall (x, y) \in E^2, \ (x|y) = \dfrac{1}{4}\|x+y\|^2 - \dfrac{1}{4}\|x-y\|^2$

En déduire que : $\forall (x, y) \in E^2, \ (x|y) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(y|e_i)$

5. On note A la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient d'indices i et j est $(e_i|e_j)$, et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{F}$ est A.

a. Prouver que $A^2 = A$.

b. Prouver que $Ker(a) = \{0_E\}$.

c. Déduire de a. et b. que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.