Équations d'ordre 2 résolubles par les méthodes classiques :

Ex7 : Résoudre : a) $y''-9y = chx$ b) $y''+y = \dfrac{1}{cos\,x}$ c) $y''+6y'+9y = \dfrac{e^{-3x}}{\sqrt{1-x^2}}$

Ex8 : Soit l'équation ($\mathcal{E}$) : $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y = 0$

1) Chercher une solution y_0 de ($\mathcal{E}$) développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions initiales $y_0(0) = 1$ et $y'_0(0) = -2$.

2) Vérifier qu'il existe un réel ω tel que $y_0(x) = e^{\omega x}$.

3) Calculer toutes les solutions de ($\mathcal{E}$).

Ex9 : Soit ($\mathcal{H}$) : $xy''-(x-2)y'-y = 0$.

1) Vérifier que ($\mathcal{H}$) a pour solution particulière $y_1(x) = 1/x$ sur $]0,+\infty[$.

2) Démontrer que ($\mathcal{H}$) admet sur $]0,+\infty[$ des solutions développables en série entière et vérifier que ces solutions s'écrivent $y = Cy_2$, où $y_2(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$ et $C \in \mathbb{R}$.

3) Donner l'écriture de la solution générale de ($\mathcal{H}$) sur $]0,+\infty[$. En déduire la solution générale de ($\mathcal{H}$) sur $[0,+\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$.

Ex10 :Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation $xy''+2y'+xy = 0$ et les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Ex11 : Trouver deux solutions particulières développables en série entière, l'une paire et l'autre impaire, pour l'équation différentielle ($\mathcal{H}$) $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y = 0$. Exprimer ces deux solutions à l'aide de fonctions usuelles. En déduire l'expression générale des solutions de ($\mathcal{H}$).

Ex12 : Soit l'équation ($\mathcal{H}$) : $y''+(2-4x^2)y = 0$

1) Chercher une solution y_0 de ($\mathcal{H}$), développable en série entière sur $\mathbb{R}$, paire et vérifiant $y_0(0) = 1$. Exprimer y_0 à l'aide de fonctions usuelles.

3) Montrer que ($\mathcal{H}$) a pour solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = K.e^{-x^2} + C.e^{-x^2}.\int_0^x e^{2t^2}dt$, où K et C sont deux constantes réelles.

Ex13 : Soit g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Résoudre l'équation différentielle $u'(x)cos\,x - 2u(x)sin\,x = g(x)$ et montrer qu'elle a pour solution générale : $u(x) = \dfrac{C_1}{cos^2 x} + \dfrac{1}{cos^2 x}\int_0^x g(t)cos\,t\,dt$

2) Vérifier que la fonction $x \mapsto tan\, x\int_0^x g(t)cos\, t\, dt - \int_0^x g(t) sin\, dt$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{cos^2 x}\int_0^x g(t)cos\, t\, dt$.

3) Montrer que l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = g(x)$ a pour solution générale :

$$y(x) = C_1\, sin\, x + C_2\, cos\, x + sin\, x\int_0^x g(t)cos\, t\, dt - cos\, x\int_0^x g(t) sin\, t\, dt$$

Équations d'ordre 2 résolubles par un changement d'inconnue :

Ex14 : Soit ($\mathcal{E}$) : $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$, où $x \in \left]0,+\infty\right[$.

1) On fait le changement de fonction inconnue $z = \dfrac{y}{x}$, c'est-à-dire $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Exprimer y, y', y'' en fonction de z, z', z''.

2) Montrer que ($\mathcal{E}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{E}$') : $z'' + z = 0$. En déduire les solutions de ($\mathcal{E}$).

Ex15 :Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$ à l'aide du changement d'inconnue $z = xy$. Établir un lien avec le résultat de l'exercice 10.

Équations d'ordre 2 résolubles par un changement de variable :

$\boxed{\text{Ex16}}$: Soit l'équation ($\mathcal{E}$) : $x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0$, où x est une variable strictement positive.

On va résoudre ($\mathcal{E}$) en faisant le changement de variable $t = ln\, x \Leftrightarrow x = e^t$. Pour cela on note z la nouvelle fonction inconnue définie par $z(t) = y(x) = y(e^t)$.

On peut calculer $y'(x)$ en fonction de $z'(t)$ de la manière suivante :

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dz(t)}{dx} = \frac{dz}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{z'(t)}{x} = z'(t).e^{-t}.$$

Dans ce calcul le plus important est de comprendre que, lorsqu'on dérive $z(t) = y(x)$, il faut décider si on dérive par rapport à *t* ou par rapport à *x*.

1) Si vous avez compris, vous devez pouvoir maintenant calculer $y''(x)$ en fonction de $z'(t)$ et $z''(t)$.

2) Établir que ($\mathcal{E}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{E}$') : $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0$.

3) Résoudre ($\mathcal{E}$') [z en fonction de t], puis ($\mathcal{E}$) [y en fonction de x].

Ex17 :Résoudre : a) $x^2y'' + xy' - y = x.ln\, x$ $(x > 0)$ par le changement de variable $t = ln\, x$.

b) $y'' + y' + e^{-2x}y = 3chx + shx$ par le changement de variable $t = e^{-x}$.

Ex18 : Soit k un paramètre réel strictement positif. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}_k)$:

$$(1-x^2)y''-xy'+k^2y=0 \text{ , où } x \in]-1,+1[$$

Résoudre $(\mathcal{E}_k)$ en utilisant le changement de variable $t = Arcsin\, x$.

<u>Application</u> : Montrer que la solution générale de $(\mathcal{E}_1)$ est : $y = C_1\sqrt{1-x^2} + C_2 x$

Ex19 : Soit l'équation $(\mathcal{E})$: $(1-x^2)y''-3xy'+15y=0$, où $|x|<1$.

On fait à la fois le changement de variable $t = Arc\cos x$ et le changement de fonction inconnue $y(x) = \dfrac{z(t)}{\sin t}$. Montrer que $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow z''(t)+16z(t)=0$. Résoudre $(\mathcal{E})$.

[Suggestion : calculer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de x, $y'(x)$ et $y''(x)$.]

Équations fonctionnelles :

Ex20 : 1) Montrer que toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, vérifiant l'équation fonctionnelle $(\mathcal{F})$: $f'(x) = f(\pi - x)$ sont solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $y''+y=0$.

2) Résoudre $(\mathcal{E})$, puis $(\mathcal{F})$. [<u>Attention</u> : $(\mathcal{E})$ n'est pas équivalente à $(\mathcal{F})$.]

Ex21 : On s'intéresse à l'équation fonctionnelle $(\mathcal{E})$: $f''(x)+\omega^2 f(-x)=0$, où ω est une constante strictement positive et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2.

Pour résoudre $(\mathcal{E})$, on utilise les deux fonctions auxiliaires $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x)$.

1) Vérifier que g est une fonction paire et que h est une fonction impaire.

2) On suppose que f est solution de $(\mathcal{E})$.

a) Montrer que g et h sont solutions du système (S) : $\begin{cases} g''(x) + \omega^2.g(x) = 0 \\ h''(x) - \omega^2.h(x) = 0 \end{cases}$

b) Résoudre (S) en tenant compte du fait que g est paire et que h est impaire.

3) Résoudre $(\mathcal{E})$.

Ex22 : Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle $(\mathcal{E})$: $x.\int_0^x f(t)dt = (x+1).\int_0^x t.f(t)dt$

[Indication : poser $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_0^x F(t)dt$. Montrer que G est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.]