ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Équations d'ordre 1 :

Ex1 : 1) Résoudre ($\mathcal{E}$) $xy'+y = x\cos x$ sur chacun des deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

2) Montrer, en utilisant un développement limité en 0, qu'il existe une unique solution prolongeable par continuité en 0.

3) Vérifier que cette solution est dérivable en 0. C'est donc une solution de ($\mathcal{E}$) sur $\mathbb{R}$.

Ex2 : Résoudre l'équation $2xy'+y = x\sqrt{x}\cos x$ sur $]0,+\infty[$, puis sur $[0,+\infty[$.

Ex3 : Pour chacune des équations suivantes, après l'avoir normalisée, calculer ses solutions sur chacun des intervalles de définition maximaux possibles. Examiner ensuite s'il est possible de prolonger par continuité les solutions aux extrémités de leur intervalle de définition. Enfin, déterminer s'il existe des solutions définies sur $\mathbb{R}$.

a) $2(x-1)y'-y = x-1$ b) $xy'+y = \ln|x|$ c) $xy'+2y = \dfrac{1}{1+x^2}$ d) $(x^2+x)y'+y+1=0$

e) $(x^2+x)y'+xy+1=0$ f) $x(1+x^2)y'+(x^2-1)y+2x=0$ g) $2xy'+y = \dfrac{1}{1+x}$

Ex4 : 1) Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ en faisant le changement de variable $t = \sqrt{x-1}$.

2) Résoudre l'équation différentielle ($\mathcal{E}$) : $2(1-x)y'-y = \dfrac{1}{x}$ sur $]1,+\infty[$.

3) En faisant un calcul analogue (mais différent !) , résoudre ($\mathcal{E}$) sur $]0,1[$.

Ex5 : 1) Dériver la fonction $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

2) Calculer une primitive de $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}_*^+$. [Il faut faire un CV <u>et</u> utiliser 1).]

3) Déterminer la solution générale de l'équation ($\mathcal{E}$) : $(1+x^2)y'+xy = \dfrac{1}{2x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

Ex6 : φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

1) Vérifier que φ est l'unique solution du système ($\mathcal{S}$) : $\begin{cases} y'-2xy=1 \\ y(0)=0 \end{cases}$

2) À partir de ($\mathcal{S}$), démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$, avec $a_1 = 1$ et, pour $n \geq 1$, ($\mathcal{R}$) : $a_{2n+1} = \dfrac{2}{2n+1}a_{2n-1}$. Déduire de ($\mathcal{R}$) une formule élégante et concise pour a_{2n+1}.