DÉTERMINANTS

Déterminants d'ordre 3 ou 4 :

Ex1 : 1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$ sous une forme factorisée.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Calculer le déterminant d'ordre n, $\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda \end{vmatrix}$

[Indication : faire comme première opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + ... + C_n$]

Ex2 : 1) Soient a,b,c trois réels. Calculer une expression factorisée de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2) Montrer que : $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = -4\Delta$

Ex3 : Soit $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$. En utilisant la propriété de linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses colonnes, écrire Δ comme somme de huit déterminants dont six sont nuls. En déduire que $\Delta = 2abc(c-b)(c-a)(b-a)$.

Ex4 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels non nuls.

1) Calculer une expression factorisée du déterminant de A et donner la valeur du rang de A en discutant selon les valeurs possibles de a et b.

2) Dans le cas où A est inversible, calculer A^{-1}.

Ex5 : Étant donné quatre réels a,b,c,d on pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ et $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$.

1) Écrire le produit $M\Omega$ et montrer qu'on peut, sur chaque colonne de $M\Omega$, trouver un facteur multiplicatif commun à tous les coefficients.

2) En déduire un coefficient K tel que $det(M\Omega) = K.det(\Omega)$.

3) Prouver que $det(\Omega) \neq 0$. En déduire $det(M)$.

Déterminants d'ordre n :

Ex6 : Soit les $2n$ nombres complexes $z_1, z_2, ..., z_n$ et $u_1, u_2, ..., u_n$.

Démontrer que, pour $n \geq 3$, $\begin{vmatrix} 1+u_1z_1 & 1+u_1z_2 & \cdots & 1+u_1z_n \\ 1+u_2z_1 & 1+u_2z_2 & \cdots & 1+u_2z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+u_nz_1 & 1+u_nz_2 & \cdots & 1+u_nz_n \end{vmatrix}$ est nul.

Ex7 : Calculer les déterminants suivants, d'ordre $n \geq 2$:

1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Ex8 : Soit *n* un entier naturel <u>pair</u> et (a,b) un couple de réels non nuls.

On considère la matrice d'ordre *n* : $A_n = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \ddots & & & \iddots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a & b & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & b & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \iddots & & & \ddots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$

1) Pour $n \geq 4$, exprimer $det(A_n)$ en fonction de $det(A_{n-2})$. En déduire $det(A_n)$en fonction de *a*,*b* et *n*.

2) Calculer le rang de A_n en discutant selon *a* et *b*.

3) Dans le cas où A_n est inversible, calculer sa matrice inverse.

$\boxed{\textbf{Ex9}}$ **:** Dans cet exercice, α et β sont deux nombres réels et $n \geq 2$.

1) Calculer le déterminant d'ordre *n*, $\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & & \vdots \\ \beta & \beta & \alpha & \ddots & \beta \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix}$.

2) Justifier que la matrice d'ordre *n*, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, est inversible. Calculer A^{-1}

$\boxed{\textbf{Ex10}}$ **:** On considère le déterminant suivant, d'ordre *n* : $\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix}$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$

On convient que $\Delta_0 = 1$ et que $\Delta_1 = \alpha$.

1) Démontrer que : $\forall n \geq 2,\ \Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta^2\Delta_{n-2}$

2) Calculer Δ_n lorsque $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

3) On suppose $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Prouver que $\Delta_n = cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

4) On suppose $\alpha = 2cos\theta$ et $\beta = 1$, où $\theta \neq 0\ [\pi]$. Prouver que $\Delta_n = \dfrac{sin((n+1)\theta)}{sin\theta}$.

Ex 11 : Soit $F(x) = \begin{vmatrix} a_1+x & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & a_2+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & b+x & a_3+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & \cdots & b+x & a_n+x \end{vmatrix}$ où x, a, b et les nombres a_i, pour $1 \leq i \leq n$, sont réels. On suppose en outre que $a \neq b$.

1) Par des combinaisons de colonnes, démontrer que $F(x) = \alpha x + \beta$, où α et β sont deux réels <u>qu'on ne cherchera pas à calculer</u>.

2) Calculer $F(-a)$ et $F(-b)$. En déduire que $\beta = \dfrac{b.\prod_{i=1}^{n}(a_i - a) - a.\prod_{i=1}^{n}(a_i - b)}{b-a}$.

Ex12 : Calculer, pour $n \geq 1$, le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & 0 \end{vmatrix}$, où $a_1, a_2, ..., a_n$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ sont des nombres complexes. [*Faites attention à l'ordre de* Δ_n.]

Ex13 : Dans cet exercice, α, β et γ sont trois nombres réels, $\beta \neq \gamma$ et $n \geq 2$.

1) Calculer le déterminant suivant d'ordre n, $D_n = \begin{vmatrix} \gamma & \gamma & \gamma & \cdots & \gamma \\ \beta & \alpha & \gamma & & \vdots \\ \beta & \beta & \alpha & \ddots & \gamma \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma \\ \beta & \cdots & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix}$.

2) Soit maintenant le déterminant d'ordre n, $\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \gamma & \cdots & \gamma \\ \beta & \alpha & \gamma & & \vdots \\ \beta & \beta & \alpha & \ddots & \gamma \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma \\ \beta & \cdots & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix}$, où $\beta \neq \gamma$.

a) Montrer que : $\Delta_n = (\alpha - \gamma)\Delta_{n-1} + \gamma(\alpha - \beta)^{n-1}$.

b) astuce En transposant Δ_n, trouver une autre expression de Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
En déduire l'expression de Δ_n en fonction de α, β, γ, n.

Ex 14: Soit le déterminant d'ordre n, $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & a & \ddots & \vdots \\ c & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$, où $n \geq 2$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1) Calculer D_2, D_3 et D_4.

2) Pour $n \geq 3$, exprimer D_n en fonction de D_{n-1}.

3) Calculer D_n en fonction de n, a, b et c.