SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS
CONVERGENCES SIMPLE, UNIFORME ET NORMALE

La norme infinie des fonctions :

Ex1 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \geq 1$.

1) Montrer en raisonnant par l'absurde que $\|f\|_\infty \geq 1$.

2) Justifier qu'il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) \geq 1$ ou $f(x_0) \leq -1$

3) On suppose que $f(0) = 0$.

a) Justifier l'existence d'un réel $h \in]0,1]$ tel que, pour $x \in [0,h]$, $|f(x)| \leq 1/2$.

b) Montrer que $\|f\|_\infty > 1$.

Suites de fonctions – convergences simple et uniforme :

Ex2 : Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme sur I des suites (f_n) définies par : a) $f_n(x) = \dfrac{n(x^2+1) - x^3}{x+n}$, $I = [0,1]$ b) $f_n(x) = n x^n \ln(x)$, $I =]0,1]$

$\boxed{\textbf{Ex3}}$ **:** On a vu en exemple de cours que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, mais pas uniformément.

Le tableau de variation de f_n est en effet :

x	0		$1/n$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

1) Soit a un réel strictement positif. Soit n_0 un entier naturel tel que $n_0 \geq 1/a$. Pour $n \geq n_0$, calculer la norme infinie de f_n sur $[a,+\infty[$. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,+\infty[$ vers la fonction nulle.

2) Pensez-vous que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+_*$? Justifiez votre réponse.

Ex4 : On définit la suite de fonctions $(s_n)_{n\in N^*}$ sur $\mathbb{R}$ par : $s_n(x) = n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$

1) Montrer que (s_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction s définie par : $s(x) = x$

2) Calculer $s_n(2n\pi) - s(2n\pi)$. En déduire que (s_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Ex5}}$ **:** On considère la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par : $f_n(x)=n^{\alpha}x.e^{-nx}$ (où α est un paramètre réel et x une variable réelle)

1) Calculer la limite simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.

2) Justifier que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. (*d'Alembert !*)

3) Dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$. En déduire $\|f_n\|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)|$ et montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha<1$.

4) On suppose $\boxed{\alpha<1}$. Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$.

5) On suppose $\boxed{\alpha=1}$.

a) Démontrer l'inégalité : $\forall u\in\mathbb{R}^+,\ u.e^{-u}\leq {}^1\!/_e$.

b) En déduire, en utilisant le **théorème de convergence dominée**, que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$$

6) On suppose $\boxed{\alpha\geq 1}$.

a) Calculer $\int_0^1 f_n(x)dx$ et montrer que $\int_0^1 f_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$.

b) A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$?

Ex6 : Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f_0=g$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit f_{n+1} par : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt$

1) Démontrer que toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

2) Soit $a>0$. Démontrer qu'il existe un réel M tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,a]$:

$$|f_n(x)|\leq M\frac{x^n}{n!}$$

3) Déterminer la limite simple de (f_n) sur $[0,a]$ puis sur $\mathbb{R}^+$. Peut-on affirmer que (f_n) converge uniformément sur $[0,a]$? Peut-on affirmer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

Séries de fonctions – convergences simple et normale :

Ex7 : Étudier la convergence simple, puis la convergence normale sur I des séries $\sum f_n$ définies par : a) $f_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x}$, $I=\mathbb{R}^+$ b) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+(x-n)^2}$, $I=\mathbb{R}$

Ex8 : Étudier sur $[0,1]$ la convergence simple, puis la convergence uniforme, de la série de terme général $(1-x)x^n$.

Ex9 : Pour $x>0$, on considère la série $\sum \frac{x}{1+x^n}$ et on note D son ***domaine de convergence***, c'est-à-dire l'ensemble des $x>0$ pour lesquels $\sum \frac{x}{1+x^n}$ converge.

1) Montrer que $D =]1,+\infty[$.

2) Montrer que $\sum \frac{x}{1+x^n}$ ne converge pas normalement sur D.

3) Soit a un réel, $a>1$. Montrer que $\sum \frac{x}{1+x^n}$ converge normalement sur $[a,+\infty)$.

4) On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^n}$. Montrer que S est continue sur D.

5) Soit $x>1$. En encadrant astucieusement $\frac{x}{1+x^n}$, montrer que : $\frac{x^2}{2(x-1)} < S(x) < \frac{x^2}{x-1}$

En déduire la limite de $S(x)$ en 1^+.

Ex10 : Soit a un paramètre réel strictement positif.

1) Établir que la série de terme général $x^a e^{-nx}$ converge normalement sur $[0,+\infty)$ si et seulement si $a>1$.

2) Calculer $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^a e^{-nx}$ pour $x>0$ et pour $x=0$. Étudier la continuité de F en 0.

3) Établir <u>en utilisant uniquement les questions 1 et 2</u> que la série de terme général $x^a e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0,+\infty)$ si et seulement si $a>1$.

Ex11 : Soient les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$, définies pour tout entier naturel n.

1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) On note $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Calculer $F(0)$ et $F(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3) Soient a et b deux réels vérifiant $b>a>0$. Démontrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[-b,-a] \cup [a,b]$.

Ex12 : 1) Prouver que la fonction F définie par $F(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

2) En remarquant que $F(x)=\frac{1}{x^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+x^2}$, montrer que $F(x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{x^2}$.

Ex13 : Pour $x\in\mathbb{R}_*^+$, calculer successivement $\sum_{n\geq 1}e^{-nx}$ et $\sum_{n\geq 1}n.e^{-nx}$.

Ex14 : Pour $n\geq 1$ et x réel strictement positif, on pose $f_n(x)=\frac{1}{n+n^2x}$.

1) Démontrer que la fonction $S=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$.

2) Calculer $f_n^{(p)}(x)$ pour tout $p\geq 0$. Démontrer que S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$.

Séries alternées de fonctions – convergence uniforme :

Ex15 : 1) Justifier que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n+1}$ est alternée et qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2) On note S la somme de cette série et S_n la somme partielle de rang n. Justifier que $\|S-S_n\|\leq\frac{1}{n+2}$. Qu'en déduit-on sur la série ?

3) Montrer que la série ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

4) Donner un sous-intervalle de $\mathbb{R}^+$ sur lequel la série converge normalement.

Ex16 : 1) Démontrer que la série alternée $\sum(-1)^n\frac{x}{n^2+x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note alors, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x}{n^2+x^2}$.

2) Montrer que $\sum(-1)^n\frac{x}{n^2+x^2}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrer que $\sum(-1)^n\frac{x}{n^2+x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

4) Montrer que, pour tout $n\geq 1$, $\int_0^{+\infty}\frac{x}{n^2+x^2}dx\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}$. En déduire qu'il est possible d'appliquer le **théorème d'intégration terme à terme** pour prouver que S est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et pour calculer $\int_0^{+\infty}S(x)dx$.