COMPLEMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE

Sauf avis contraire, E est un K-espace vectoriel, avec K=$\mathbb{R}$ ou K=$\mathbb{C}$.

Symétries et projections :

Ex1 : E est un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.

On considère l'endomorphisme f de matrice $M=\begin{pmatrix}5 & 6 & 2\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & -6 & 5\end{pmatrix}$.

1) Calculer M^2. En déduire une constante λ non nulle telle que $p=\lambda f$ soit une projection.

2) Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces $F=Ker(p-Id_E)$ et $G=Kerp$.

Ex2 : Soit la matrice carrée d'ordre n : $A=\frac{1}{n}\times\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$

1) Justifier que A est la matrice d'une projection.

2) Déterminer le rang de A puis déterminer dans $\mathbb{R}^n$ une base de $Im\,A$.

3) Calculer dans $\mathbb{R}^n$ une équation cartésienne de $KerA$ et donner une base de $KerA$.

Ex3 : Soient p et q deux projections de E.

1) Démontrer que, si $Im\,p=Im\,q$, alors $p\circ q=q$ et $q\circ p=p$.
[Rappel utile : $Im\,p=Ker(Id-p)$ et $Im(q)=Ker(q-Id)$]

2) Démontrer la réciproque de l'implication précédente.

Ex4 : p et q sont deux projections de E telles que $p\circ q=q\circ p=0$.

1) Montrer que $p+q$ est une projection.

2) Montrer que $Kerp\cap Kerq\subset Ker(p+q)$ et $Im(p+q)\subset Im\,p+Im\,q$.

3) Montrer que $Ker(p+q)\subset Kerp$ et $Ker(p+q)\subset Kerq$.
Que peut-on dire de $Ker(p+q)$ et $Kerp\cap Kerq$?

4) Montrer que $Im\,p\cap Im\,q=\{0_E\}$.
[Suggestion : utiliser que $Im\,p=Ker(p-Id)$ et $Im\,q=Ker(q-Id)$]

5) Montrer que $Im(p+q)=Im\,p\oplus Im\,q$.
[Suggestion : montrer que : $u\in Im\,p+Im\,q\Rightarrow p(u)+q(u)=u$]

Ex5 : Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$.

1) Montrer que les endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projections.

2) Montrer que $f \circ g$ est une projection sur $Im(f)$.

3) Montrer que $g \circ f$ est une projection parallèlement à $Ker(f)$.

4) On suppose en outre que $g \circ f \circ g = g$. Démontrer que $Ker(f)$ et $Im(g)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E et que $g \circ f$ est une projection sur $Im\, g$.

Ex6 : 1) Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer $P = \frac{1}{4}(I_4 + M + M^2 + M^3)$ et M^4.

Vérifier que P est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ d'une projection p dont vous donnerez le noyau et l'image.

2) Soit n un entier naturel non nul et f un endomorphisme de E vérifiant $f^n = Id$.

On définit l'endomorphisme $p = \frac{1}{n}(Id + f + f^2 + ... + f^{n-1})$.

a) Vérifier que p est une projection et que $Ker(f - Id) \subset Im(p)$.

b) Simplifier $(f - Id) \circ p$. En déduire que $Ker(f - Id) = Im(p)$.

Ex7 : Soit E=$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application $\varphi : \begin{array}{l} E \to E \\ M \mapsto {}^tM \end{array}$, où ${}^tM$ est la transposée de M.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E. Vérifier que φ est une symétrie.

2) Calculer la matrice de φ dans la base canonique de E.

Bases adaptées à une décomposition de *E* en somme directe de sous-espaces :

Ex8 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension 4, muni d'une base $\mathcal{B}=(i, j, k, l)$.

On note (x, y, z, t) les coordonnées d'un vecteur de E dans la base $\mathcal{B}$.

P est le sous-espace de E d'équation cartésienne $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$.

Q est le sous-espace de E d'équation cartésienne $\begin{cases} x = y \\ x + z = 0 \end{cases}$.

1) Montrer que P et Q sont deux plans. Montrer que $P \cap Q = \{0_E\}$.

2) Justifier que P et Q sont deux plans supplémentaires dans E.

Déterminer une base $\mathcal{B}'=(e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E adaptée à la décomposition $E = P \oplus Q$.

3) Ecrire la matrice dans $\mathcal{B}'$ de la projection p sur P parallèlement à Q. En déduire la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

$\boxed{\textbf{Ex9}}$ **:** Soit E un espace vectoriel réel de <u>dimension finie</u>.

Soit f un endomorphisme de E vérifiant l'égalité $f^2 = 3.f - 2.Id$.

1) Montrer que $Im(f - 2Id) \subset Ker(f - Id)$ et $Im(f - Id) \subset Ker(f - 2Id)$.

2) Montrer que $Ker(f - Id) \cap Ker(f - 2Id) = \{0_E\}$. En déduire grâce à la formule de Grassmann que $dim(Ker(f - Id)) + dim(Ker(f - 2Id)) \leq dim\, E$.

3) Montrer en utilisant 1), 2) et le théorème du rang que $Im(f - 2Id) = Ker(f - Id)$, $Im(f - Id) = Ker(f - 2Id)$ et $E = Ker(f - Id) \oplus Ker(f - 2Id)$.

4) Écrire la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition.

Ex10 : Soit f un endomorphisme de E vérifiant la condition ($\mathcal{C}$) : $f^2 = 3.f - 2.Id$

On suppose que f n'est pas une homothétie.

1) Montrer que (Id, f) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. On note alors V le plan de base (Id, f) contenu dans $\mathcal{L}(E)$.

2) Montrer qu'il existe exactement deux éléments de V qui sont des projections, autres que l'application nulle et l'application-identité. On les notera p_1 et p_2.

3) Vérifier que p_1 et p_2 sont la projection sur $Ker(f - Id)$ parallèlement à $Ker(f - 2Id)$ et la projection sur $Ker(f - 2Id)$ parallèlement à $Ker(f - Id)$.

Ex11 :E est de dimension n et f est un endomorphisme de E tel que $Im\, f = Ker\, f$.

1) Prouver que n est un nombre pair (on posera $p = n/2$) et que l'application f^2 est nulle.

2) Choisir une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit par blocs $\begin{bmatrix} O_p & I_p \\ O_p & O_p \end{bmatrix}$.

Sous-espaces stables - endomorphismes induits :

Ex12 : On considère un espace vectoriel E de dimension 4, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}^*$, f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

2) On pose $\varepsilon_1 = e_1 + \alpha.e_4$, $\varepsilon_2 = e_2$ et $\varepsilon_3 = e_3$

Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $F = Im\, f$.

3) Calculer, dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la matrice de l'endomorphisme g induit par f sur F.

Ex13 : Dans un espace E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, φ est l'endomorphisme de matrice $M = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Déterminer un vecteur directeur ε_0 de $Ker\varphi$ et une base $\mathcal{B}_1$=(ε_1, ε_2) de $Im\,\varphi$.

2) On rappelle que le sous-espace $F = Im\,\varphi$ est stable par φ. On peut donc considérer l'endomorphisme ψ induit par φ sur F.

a) Justifier que $E = Ker\varphi \oplus F$. En déduire que ψ est injectif, puis bijectif.

b) Calculer la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}_1$ de F.

Ex14 : Soient f un endomorphisme quelconque de E et p une projection de E.

Montrer que : $f \circ p = p \circ f \Leftrightarrow Ker\,p$ et $Im\,p$ sont stables par f

Ex15 : Soient f et g appartenant à $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad f^p \circ g - g \circ f^p = p f^p$

2) Montrer que $Kerf$ et $Im\,f$ sont stables par g.

Ex16 :E est un espace de dimension n, F est un sous-espace de E de dimension p, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) On définit $f^{-1}(F) = \{u \in E \,/\, f(u) \in F\}$. Vérifier que $f^{-1}(F)$ est un sous-espace de E.

2) Montrer que, si $\mathcal{B}$=$(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est base de F, $f(F) = Vec(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))$.

3) On suppose <u>uniquement dans cette question</u> que f est bijective et que F est stable par f.

a) Montrer que $\mathcal{B}'$=$(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est base de $f(F)$. En déduire que $f(F) = F$.

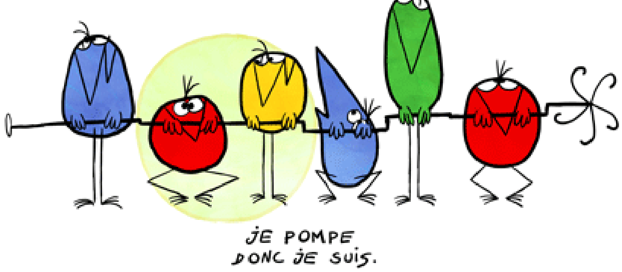
b) Montrer successivement que $F \subset f^{-1}(F)$ et que $F = f^{-1}(F)$.

4) On revient au cas général. Démontrer que : *(i)* $f(f^{-1}(F)) = F \cap Im\,f$

(ii) $f^{-1}(f(F)) = F + Kerf$

$\boxed{\textbf{Ex17}}$ **:**On note $\mathcal{B}$=$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, pour tout entier k compris entre 1 et n, on note $V_k = Vec(e_1, e_2, \ldots, e_k)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'endomorphisme canoniquement associé f.

Démontrer que : A est triangulaire supérieure $\Leftrightarrow \forall k \in [1, n]$, V_k est stable par f



Matrices semblables :

Pour les exercices 18 à 21, penser à utiliser les endomorphismes canoniquement associés.

Ex18 :Démontrer que les deux matrices $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ sont semblables.

Ex19 : Entre les trois matrices suivantes, déterminer quelles relations de similarité sont vraies :

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Ex20 : Soit $A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&0&1&0\\\vdots&&\ddots&0&1\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{bmatrix}$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et ${}^tA$ sont semblables.

Ex21 : La matrice d'ordre n, $A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$ est-elle semblable aux matrices suivantes, également d'ordre n ?

a) $A_1=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{bmatrix}$ b) $A_2=\begin{bmatrix}n&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$ c) $A_3=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n\end{bmatrix}$

Ex22 : Soient A et B deux matrices semblables inversibles. Montrer que A^{-1} et B^{-1} sont semblables.

Ex23 : Soit A une matrice inversible et B une matrice quelconque, de même taille. Montrer que les matrices AB et BA sont semblables.

Déterminants par blocs :

Ex24 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, où a n'est pas nul.

1) On définit par blocs la matrice $B = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$, qui appartient à $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Pour $n = 1$, puis pour $n = 2$, calculer le déterminant de B.

b) n étant quelconque, en triangularisant B, montrer que : $det\, B = (ad - bc)^n$

2) Étant donné une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit par blocs la matrice $P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$.

Écrire P comme produit de B et d'une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ diagonale par blocs.

En déduire une expression simple du déterminant de P.

Ex25 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$, matrice d'ordre $2n$.

Démontrer par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes de M que :

$$det(M) = det(A + B).det(A - B)$$

Ex26 : Soient A, B, C et D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible et que $AC = CA$.

On définit par blocs dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

En considérant le produit NM, où $N = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_n \\ -C & A \end{pmatrix}$, démontrer la formule :

$$det(M) = det(AD - CB)$$

Ex27 : Pour n entier naturel non nul et a paramètre réel, on considère le déterminant d'ordre $2n$ écrit par blocs : $\Delta_n(a) = \begin{vmatrix} aI_n & I_n \\ -I_n & aI_n \end{vmatrix}$

Grâce à des opérations effectuées sur les lignes et les colonnes de $\Delta_n(a)$, démontrer que :

$$\Delta_n(a) = (a^2 + 1)^n$$