TP 1. Dynamique des populations

L'objectif de ce TP est de faire la synthèse des notions étudiées cette année dans le contexte de l'étude d'une dynamique d'une population bactérienne.

Nota Bene. La rédaction des solutions se fait sur le *document réponse* joint. La partie informatique doit être traitée dans des fichiers respectant la dénomination indiquée dans le document réponse.

1 Un modèle discret

On étudie l'évolution d'une population de bactéries d'une souche donnée dans un milieu fermé et non renouvellé. Le nombre d'individus est donné en mg.
On note N_k le nombre d'individu à la génération k et on considère l'équation $N_{k+1} = f(N_k)$ qui donne une relation entre le nombre d'individus à la génération k et le nombre d'individus à la génération suivante $k+1$. Étant donné un effectif initial N_0 on peut donc calculer par récurrence les effectifs pour chaque génération.

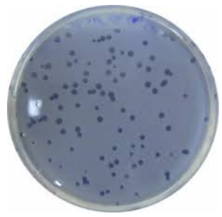

Figure 1. Boite de pétri

Nous adoptons le modèle *logisitique à temps discret* introduit par le scientifique Pierre François Verhulst vers 1840. Il postule que l'évolution est régie par la relation :

$$N_{k+1} = \mu N_k \left(1 - cN_k\right)$$

où μ est relié au taux de croissance naturel de la population et c est un facteur relié à la capacité d'accueil maximale du milieu K par la relation $c = \dfrac{\mu - 1}{K\mu}$.

L'évolution de N_k dans le temps est soumise à deux contraintes opposées ; N_{k+1} est le produit de deux facteurs :

- μN_k permet de prendre en compte un accroissement naturel de la population.
- $1 - cN_k$ indique quant à lui que lorsque la population est trop nombreuse (relativement à la capacité d'acceuil), elle a tendance à diminuer.

Dans la suite on fixe la capacité d'accueil $K = 100$ mg. Le fichier Python contient l'instruction :

```
K=100 # Capacité d'accueil du milieu
```

La variable `K` sera traitée comme une *variable globale.*

Question 1.

1. Écrire une fonction Python `suiteN(N0,mu,n)` dont les paramètres d'entrée sont
   - `N0` de type `float` donnant l'effectif initial en mg ;
   - `mu` de type `float` donnant la valeur du paramètre μ ;
   - `n` de type `int` le nombre de générations.

   La fonction retourne la **liste** des valeurs N_k pour les générations $k = 0$ à n.
2. Tester votre fonction pour les valeurs $N_0 = 40$ mg, $\mu = 2.7$ et $n = 36$. Sur un graphe placer les points donnant l'évolution de l'effectif. On rappelle les commandes pour tracer une liste de points avec la librairie `matplotlib` :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
date=np.linspace(0,36,37)  # abscisses
effectif=suiteN(40,2.7,36)  # ordonnées
plt.plot(date,effectif,'-o')
plt.grid()
plt.show()
```

3. Que constate-t'on ? Reprendre et obtenir le tracé pour $\mu = 3.1$.

On considère que la population bactérienne se stabilise lorsque l'écart entre deux générations successives devient plus faible qu'une valeur donnée.

Question 2.

1. Écrire une fonction Python `limiteN(N0,mu,epsilon)` qui calcule les valeurs successives de la suite N_k jusqu'à ce que $|N_{k+1} - N_k|$ soit inférieure à la précision `epsilon` de type `float` donnée en entrée. La fonction retourne alors la dernière valeur N_k calculée ; si au bout de 50000 itérations la suite ne s'est pas stabilisée la fonction retourne la chaine de caractères `'instable'`. Tester pour `epsilon=1e-12` et `N0 = 90` avec `mu=2.7` et `mu=3.1`.
2. On fixe `epsilon=1e-12` et `N0 = 90` . Faire parcourir à `mu` l'intervalle $[2, 4]$ avec un pas de 0.05 pour chercher dans quelle zone de valeurs du paramètre on a stabilisation des effectifs. On réalisera un affichage de la valeur `mu` et de l'effectif limite associé ou du mot `'instable'` selon la situation.

2 Confrontation du modèle aux mesures

On utilise une méthode de cytométrie en flux pour obtenir la taille de la population bactérienne à intervalles de temps réguliers ; on réalise une mesure par heure pendant 36 heures. Les résultats sont donnés dans un fichier texte `mesurePopulation.txt` du type suivant.

```
# tps (heure) ; population (mg)
0.0;41.2
1.0;85.71
2.0;102.58
...
35.0;104.44
36.0;104.44
```

Les caractéristiques de la population étudiée sont :

$$K = 105.5 \text{ mg} \; ; \; N_0 = 41.2 \text{ mg} \; ; \; \mu = 2.85$$

Question 3. Récupérer le fichier `mesurePopulation.txt` et le copier dans votre répertoire de travail.

1. On se propose de stocker les mesures dans une liste Python. Les instructions suivantes permettent de lire le fichier et de placer les mesures d'effectifs dans la liste `effPop`. Les exécuter.

```
fichier=open('mesuresPopulation.txt',mode='r')
effPop=[]
fichier.readline() # Lecture de la ligne en préambule
ligne=fichier.readline()
while ligne!="" :
    mesure=float(ligne.split(';')[1]) # Recupération de la mesure
    effPop.append(mesure) # Ajout de la mesure à la liste
    ligne=fichier.readline()
fichier.close()
```

2. Placer sur un même graphe la courbe donnée par la mesure expérimentale de l'effectif et celle donnée par la modélisation de la partie 1.

Question 4.

1. Définir une fonction `moyenne(L)` dont l'argument est une liste de nombres `L` et qui retourne la moyenne des éléments de la liste.
2. Créer une liste `ecart` dont les éléments sont les valeurs des différences entre les mesures expérimentales (dans `effPop`) et les effectifs théoriques donnés par la modélisation de la partie 1 (utiliser la fonction de la question 1).
3. Calculer la moyenne de `ecart`.

3 Un modèle continu

On étudie au cours du temps l'effectif $N(t)$ d'une population bactérienne dont le nombre d'individus est donné en mg. Le modèle logisitique continu considère que la fonction N vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

où r (taux de croissance intrinsèque de la population) et K (capacité maximale d'accueil) sont deux paramètres réels strictement positifs caractéristiques de la poulation.

La population étudiée a les caractéristiques suivantes :

taux de croissance $r = 0,2$ mg/h et capacité d'accueil $K = 100$ mg.

Étant donné un effectif initial $N(0) = N_0$ la détermination de l'effectif $N(t)$ à chaque instant t nous amène à chercher des solutions de l'équation différentielle précédente.

Question 5. Dans un premier temps on se propose de faire *résolution numérique* de l'équation différentielle.

1. En utilisant la fonction `odeint` de la bibilothèque `scipy.integrate` tracer la courbe d'évolution d'une population d'effectif initial $N_0 = 40$ mg pendant 36 heures.
2. Tracer sur un même graphe les courbes représentant l'évolution de la population bactérienne pendant 36 heures pour les conditions initiales :

   $$N_0 = 20, 60, 80, 100, 120, 140 \text{ et } 180 \text{ mg}.$$

   Que constate-t'on ?

Question 6. On résout l'équation différentielle par *séparation des variables*. En considérant une solution $N(t)$ qui reste dans l'intervalle $]0, K[$ on écrit pour tout réel t :

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \iff \frac{K}{N(t)(K - N(t))}N'(t) = r$$

1. **Calcul de la solution.**
   (a) Trouver des constantes α et β telles que :

   $$\frac{K}{N(K-N)} = \frac{\alpha}{N} + \frac{\beta}{(K-N)}$$

   (b) En déduire une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{K}{N(t)(K-N(t))}N'(t)$ puis en utilisant l'équation sous forme séparée vérifier que :

   $$\frac{N(t)}{K - N(t)} = C_0 e^{rt} \text{ avec } C_0 = \frac{N_0}{K - N_0}$$

   Pour finir donner l'expression de la solution.
2. Définir une fonction `N_exact(t)` et tracer son graphe (sur 36 heures pour $N_0 = 40$ mg).
3. Positionner sur un même graphique les courbes de la solution exacte et de la solution approchée de la question précédente. Que constate-t'on ?

Question 7. On reprend la solution obtenue à la question précédente (ainsi que les valeurs numériques données). À l'aide de la fonction `fsolve` résoudre l'équation :

$$N(t) = 2N_0$$

pour déterminer au bout de combien d'heures t_1 la population a doublé son effectif initial.

4 Un modèle continu avec compétition : équations de Lotka-Volterra

Dans cette partie nous supposons que deux populations de bactéries sont en compétition. Nous notons $N_1(t)$ et $N_2(t)$ les effectifs des deux populations. Nous considérons un cas où la limitation des ressources est négligée. L'évolution de ces populations est gouvernée par le système d'équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} & = & r_1 N_1\left(1-d_2N_2\right)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} & = & -r_2 N_2\left(1-d_1N_1\right)\end{array}\right.$$

Les nombres r_1 et r_2 représentent les taux de croissance des populations ; les coefficients d_1 et d_2 indiquent le type d'interaction entre les populations. La population 1 est considérée comme la population *proie* et la population 2 comme la population *prédatrice.*

Question 8.

1. Écrire le système d'équation sous la forme d'un *problème de Cauchy* :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}t} = \phi(\mathbf{Y}, t)\\ \mathbf{Y}(t_0) = y_0\end{array}\right. \quad \text{, où } \mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} N_1(t)\\ N_2(t)\end{pmatrix} = [\mathbf{Y}[0], \mathbf{Y}[1]].$$

2. On utilise toujours la fonction `odeint` de la bibilothèque `scipy.integrate`. Tracer sur un même graphe les courbes d'évolution $N_1(t)$ et $N_2(t)$ dans les conditions suivantes :

   (a) **Cas symétrique.** $r_1 = r_2 = 0.2$; $d_1 = d_2 = 0.1$ sur une durée de 5 jours avec des conditions initiales $N_1(0) = 20$ mg et $N_2(0) = 40$ mg.
   Que constate-t'on ?
   Déterminer une valeur approchée pour les effectifs maximaux.

   (b) **Cas d'une population proie à forte croissance.** $r_1 = 0.8$; $r_2 = 0.2$; $d_1 = d_2 = 0.1$ sur une durée de 5 jours avec des conditions initiales $N_1(0) = 20$ mg et $N_2(0) = 40$ mg.
   Que constate-t'on ?

   (c) **Cas d'une population prédatrice à forte croissance.** $r_1 = r_2 = 0.2$; $d_1 = 0.1$; $d_2 = 0.2$ sur une durée de 3 jours avec des conditions initiales $N_1(0) = 100$ mg et $N_2(0) = 20$ mg.
   Que constate-t'on ?