Nom : **Prénom :**

Exercices de programmation Python

pour le mardi 7 octobre 2013

Consignes. *Vous répondez sur le document. Respectez au mieux la syntaxe Python. Prenez soin de faire apparaître l'indentation.*

Exercice 1. Lire des programmes Python

Pour chacun des programmes **Pyhton** ci-dessous écrire à gauche le(s) résultat(s) attendu(s) dans l'interpréteur.

- **Programme 1.**

```
s=1
k=0
while k<3 :
    s=2**s
    k=k+1
print(k,s)
```

Réponse.

- **Programme 2.**

```
for k in range(0,10) :
    if k% 2 == 0 :
        print(k)
    else :
        print('*')
```

Réponse.

- **Programme 3.**

```
c=0
mot='coucou'
for l in mot :
    if l == 'o' :
        c=c+1
print(c)
```

Réponse.

Exercice 2. Valuation 2-adique

En mathématiques les nombres p-adiques (où p désigne un nombre premier) sont des objets pouvant se représenter comme une suite de chiffres en base p, éventuellement infinie à gauche de la virgule mais toujours finie à droite. Ils constituent une alternative numérique à l'ensemble des nombres réels et interviennent dans certaines théories physiques.

Une construction de ces nombres repose sur la définition d'une valeur absolue p-adique sur l'ensemble des nombres rationnels : cette dernière est définie au moyen d'une valuation que l'on étudie dans ce qui suit. On se borne au cas $p = 2$.

1. Définir une fonction **Python**, nommée `val2(r)`, dont le paramètre d'entrée est un entier strictement positif r et qui retourne le plus grand entier N tel que :

$$2^N \text{ divise } r$$

Exemple. Pour $r = 24$ on a $N = 3$ car 24 est divisble par $2^3 = 8$ mais n'est pas divisible par $2^4 = 16$.

La fonction `val2(r)` retourne la valuation 2-adique de l'entier r.

Fonction val2

2. Donner la liste de vos variables locales utilisées dans `val2` :

....

3. On souhaite calculer la valuation 2-adique du nombre (100 000)!. Proposer et mettre en œuvre une stratégie. Donner le résultat.

Réponse

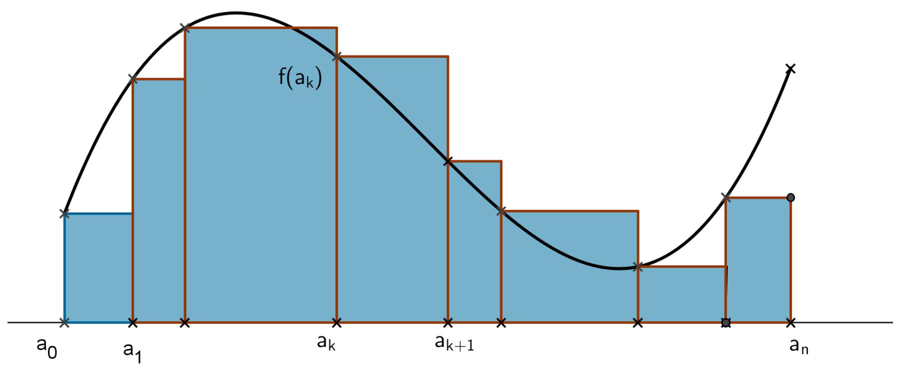
Exercice 3. La méthode des rectangles

De nombreux problèmes conduisent à des calculs d'intégrales. Cependant il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression explicite d'une primitive d'une fonction donnée. Dans d'autres situations une fonction n'est connue qu'à partir d'un nombre fini de valeurs ce qui rend de fait impossible tout calcul d'intégrale.

Considérons un intervalle $[a, b]$ et une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de cet intervalle. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La **somme de Riemann** (à gauche) de la fonction f associée à la subsdivision σ est par définition :

$$R_g(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k)$$

Géométriquement, $R_g(\sigma, f)$ représente la somme des aires algébriques des rectangles de base $[a_k, a_{k+1}]$ et de hauteur $[a_k, f(a_k)]$:



Le **pas** d'une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est la plus grandes des distances $\delta = |a_{k+1} - a_k|$.

L'idée est que lorsque le **pas de la subdivision** σ tend vers 0, nous avons

$$R_g(\sigma, f) \underset{\delta \to 0}{\approx} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Dans le cas d'une subdivision à pas constant de $[a, b]$ en n sous-intervalles nous avons donc :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$$

On pose alors

$$\boxed{R_{g,n}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b - a)\right)}$$

Supposons enfin que la fonction f à intégrer à une dérivée continue et bornée par une valeur M_1.

Nous avons dans le cas d'une subdivision à pas constant de $[a, b]$ en n sous-intervalles l'estimation de l'erreur commise en approchant l'intégrale par la somme :

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - R_{g,n}(f) \right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Définir une fonction **Python** `rectangle(f,a,b,n)` qui prend les arguments suivants : une fonction f, deux flottants a et b et un entier n. La fonction retourne la valeur $R_{g,n}(f)$ (méthodes des rectangles à gauche).

Fonction rectangle

La fonction *sinus intégral* notée Si, introduite par Fresnel dans l'étude des vibrations lumineuses, est définie pour tout réel x par

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Elle n'admet pas d'expression utilisant des fonctions usuelles.

2. On suppose que la fonction `sin` est importée du module `math`. Définir une fonction Python `sinc(t)` qui pour un argument d'entrée t retourne la valeur $\frac{\sin(t)}{t}$ lorsque $t \neq 0$ et la valeur 1 si $t = 0$.

3. On suppose que les fonctions `rectangle` et `sinc` sont définies. Écrire une instruction Python permettant d'obtenir une valeur approchée de la valeur Si(100.0) à 10^{-2} près.

4. Chercher en vous documentant de diverses manières une fonction Python (issue d'un module de calcul scientifique) qui permet de réaliser des calculs numériques d'intégrales.