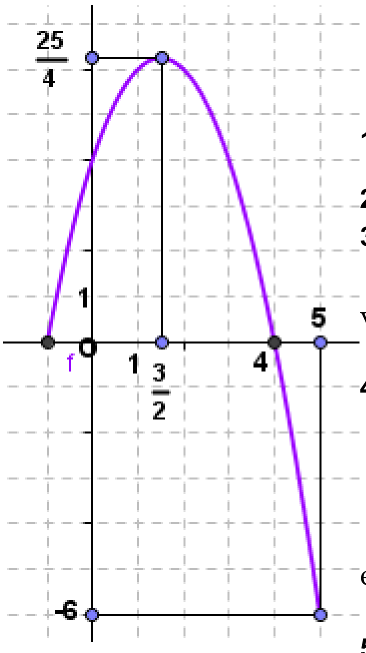
Exercice 1

f définie sur $[-1;5]$ $f(x)=3x-x^2+4$.

x	-1		$\frac{3}{2}$		4		5
$f(x)$	0	$\nearrow$	b	$\searrow$	0	$\searrow$	-6



1. $b=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\times 3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4=\frac{9}{2}-\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}$

2. $f(4)=0$

3. Le (ou les) antécédent(s) de 4 sont solutions de $f(x)=4$ $\Leftrightarrow$ $3x-x^2+4=4$ $\Leftrightarrow$ $3x-x^2=0$ $\Leftrightarrow$ $x(3-x)=0$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ ou $x=3$ (ces deux valeurs sont dans $[-1;5]$ donc elles conviennent).

4. D'après le tableau de variations, f est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{2};5\right]$ ce qui implique que pour tout nombre a et b de $\left[\frac{3}{2};5\right]$ vérifiant $a<b$, on a $f(a)>f(b)$. Comme 3 et $\sqrt{5}$ sont dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2};5\right]$ et vérifient $\sqrt{5}<3$ alors $f(\sqrt{5})>f(3)$.

5. Voir ci-contre.

6. En utilisant le tableau de variations, compte-tenu que $f(4)=0$, les solutions de $f(x)\geqslant 0$ sont les nombres contenus dans $[-1;4]$.

7. Lorsque x appartient à $[-1;5]$, les valeurs des images sont comprises entre le minimum -6 et le maximum $\frac{25}{4}$. En d'autres termes pour x appartenant à $[-1;5]$, $f(x) \in \left[-6;\frac{25}{4}\right]$.

Exercice 2

1. 2 est-il solution de l'inéquation $\frac{x}{2x+1}\leq 1$? $\frac{2}{2\times 2+1}=\frac{2}{5}$ et $\frac{2}{5}\leqslant 1$ donc 2 est solution.

2. Cette inéquation possède une valeur interdite: $2x+1\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x\neq -\frac{1}{2}$.

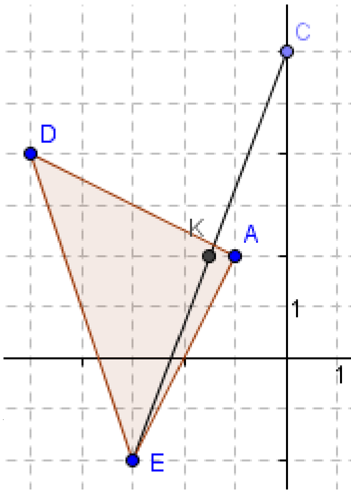
Pour tout x différent de $-\frac{1}{2}$, $\frac{x}{2x+1}\leq 1$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x}{2x+1}-1\leq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x}{2x+1}-\frac{2x+1}{2x+1}\leq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x-2x-1}{2x+1}\leq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{-x-1}{2x+1}\leq 0$

3. Pour résoudre cette inéquation, on peut utiliser un tableau de signes.

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-x-1$	$+$	0	$-$		$-$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-x-1}{2x+1}$	$-$	0	$+$	**v.i**	$-$

On a donc par simple lecture du tableau : $\dfrac{-x-1}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-1\right] \cup \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice 3



a) Voir ci-contre.

b) *A* est-il le milieu de [*CE*] ? Soit K le milieu de $[CE]$. on a :

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_C + x_E}{2} \\ y_K = \dfrac{y_C + y_E}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{0+(-3)}{2} \\ y_K = \dfrac{6+(-2)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow K\left(-\dfrac{3}{2};2\right)$$

. Les coordonnées sont différentes de celles de A donc A n'est pas le milieu de $[CE]$.

c) Démontrer que le triangle *ADE* est isocèle en *A*. Ce triangle est-il rectangle ?

On calcule les longueurs AD et AE.

$AD^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = (-5+1)^2 + (4-2)^2 = (-4)^2 + 2^2 = 20$ donc $AD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. De même, on prouve que $AE = 2\sqrt{5}$. Comme $AE = AD$ le triangle ADE est isocèle en A.

$DE^2 = (-3+5)^2 + (-2-4)^2 = 2^2 + (-6)^2 = 40$. On a donc $DE^2 = AD^2 + AE^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ADE est un triangle rectangle en A.

Exercice 4

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2x)(1-x)$.

1. g définie par $g(x) = -2x-4$.

a. C_g est une droite d'équation $y = -2x-4$, en effet la fonction g est une fonction affine.

b. Représenter C_g : voir ci-contre

2. Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$.
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de la droite C_g :
Il s'agit des nombres -2, -1 et 2.

3. a. $-x^3 - x^2 + 4x + 4 = (4 - x^2)(x+1)$ ***OK***

b. $f(x) = g(x)$

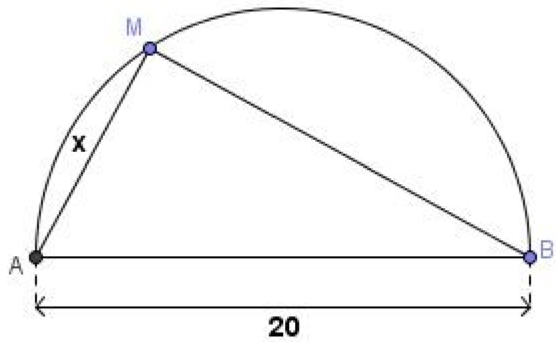
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x^2+2x)(1-x) = -2x-4 \\
&\Leftrightarrow x^2 - x^3 + 2x - 2x^2 + 2x + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow -x^3 - x^2 + 4x + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow (4-x^2)(x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2-x)(2+x)(x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2-x = 0 \text{ ou } 2+x = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = -1
\end{aligned}$$

Ainsi les solutions sont -2, -1 et 2.

Exercice 5 :

Droite	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine	Fonction associée
D_1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$f_4(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$
D_2	3	-2	$f_2(x)=3x-2$
D_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$f_1(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}$
D_4	0	1	$f_5(x)=1$
D_5	3	-6	$f_3(x)=3x-6$

Exercice 6



M est un point variable du demi-cercle de diamètre [*AB*] et de diamètre 20 cm ci-dessus.
Objectif : déterminer la ou les positions du point *M* pour lesquelles *MA* + *MB* = 28 cm.
On pose $x = MA$ (on a $x \in [0;20]$).

Partie 1: Mise en équation du problème :

1. Triangle MAB est rectangle en M ? Le point M appartient au demi-cercle de diamètre $[AB]$ donc le triangle MAB est rectangle en M (propriété de 4ème)

2..Théorème de Pythagore dans MAB rectangle en M : $MB^2=AB^2-MA^2=20^2-x^2=400-x^2$ (1)

3. $MA+MB=28 \Leftrightarrow MB=28-MA \Leftrightarrow MB=28-x$ et
$MB^2=(28-x)^2=28^2-2\times 28\times x+x^2=x^2-56x+784$ (2)

4. D'après les égalités (1) et (2), on obtient $400-x^2=x^2-56x+784 \Leftrightarrow 0=2x^2-56x+384$

5. Puis $0=2x^2-56x+384 \Leftrightarrow x^2-28x+192=0$ (division par 2)

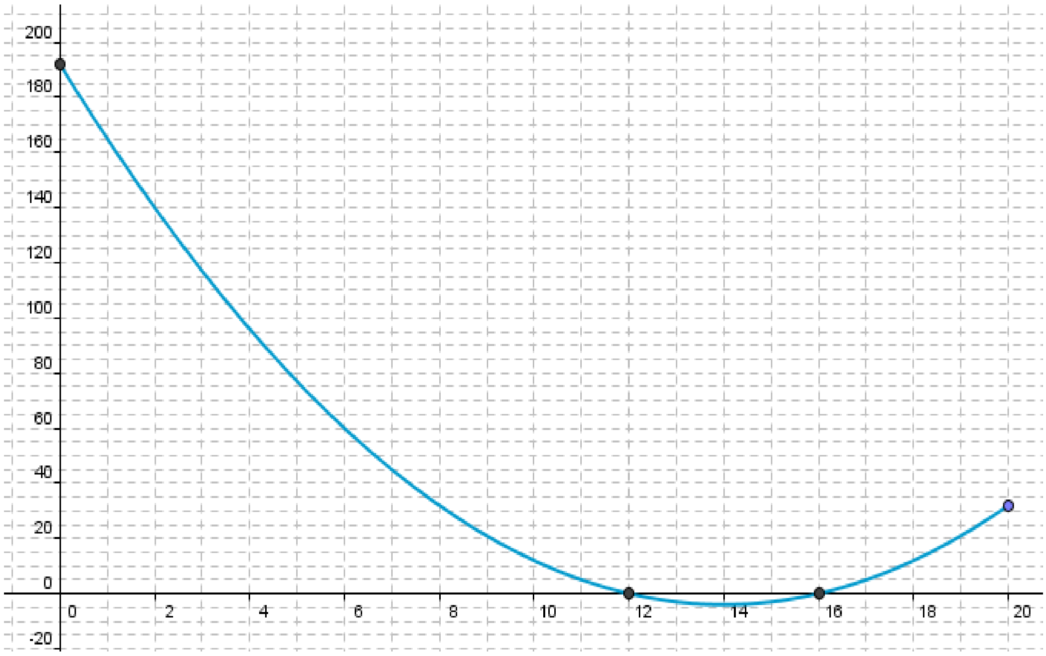
Partie 2 : Résolution graphique:

$f(x)=x^2-28x+192$ pour *x* compris entre 0 et 20.

1.

x	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	20
$f(x)$	192	165	117	77	45	21	5	-3	-3	5	21	32

2.Voir ci-dessous.



3. Conjecture sur les solutions de l'équation $x^2-28x+192=0$
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses :
On lit $x=12$ et $x=16$

Partie 3 : Recherche des solutions exactes :

1. $x^2-28x+192=(x-14)^2-4$ **OK,** il suffit de développer le membre de gauche.

2. $x^2-28x+192=0 \Leftrightarrow (x-14)^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-14-2)(x-14+2)=0 \Leftrightarrow (x-16)(x-12)=0 \Leftrightarrow$
$x-16=0$ ou $x-12=0 \Leftrightarrow x=16$ ou $x=12$

3. Lorsque $MA=12$ ou $MA=16$ alors $MA+MB=28$ (Deux positions possibles du point M)

4. Même résultat Q3 partie 2.