Devoir commun de mathématiques – Secondes –
Jeudi 28 janvier 2010 - Durée : 2 heures - calculatrice autorisée -

Pensez à remettre le sujet avec votre copie.
Le soin et la qualité de la rédaction seront pris en compte (2 points sur 40).

__Exercice 1__ *(8 points - 25 minutes environ)*

On considère la fonction f définie sur $[-1;5]$ par $f(x)=3x-x^2+4$. Ci-dessous son tableau de variations sur $[-1;5]$.

x	-1	$\frac{3}{2}$	5
$f(x)$	0 $\nearrow$	b	$\searrow$ -6

1. Calculer b .
2. Déterminer par le calcul l'image de 4 par f .

3. Déterminer par le calcul le (ou les) antécédent(s) de 4.

4. Comparer $f(3)$ et $f(\sqrt{5})$, sans faire de calcul, et en utilisant les variations de f sur un intervalle convenablement choisi.

5. Construire, dans le repère sur la *__feuille annexe__*, une courbe susceptible de représenter la fonction f (ne pas calculer de nouvelles valeurs, utiliser uniquement le tableau de variations et les résultats des questions 1 , 2 et 3).

6. Résoudre $f(x)\geqslant 0$ sur $[-1;5]$ par la méthode de votre choix.

7. A quel intervalle appartient $f(x)$ lorsque x appartient à $[-1;5]$?

__Exercice 2__ *(5 points - 15 minutes environ)*

1. Le réel 2 est-il solution de l'inéquation $\frac{x}{2x+1}\leq 1$? Répondre en justifiant et sans chercher à résoudre l'inéquation.
2. Montrer que cette inéquation est équivalente à la suivante : $\frac{-x-1}{2x+1}\leq 0$
3. Résoudre cette inéquation.

__Exercice 3__ *(5 points - 15 minutes environ)*

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I,J).
Soit les points suivants $A(-1;2)$, $C(0;6)$, $D(-5;4)$ et $E(-3;-2)$.

a) Placer les points A , C , D et E dans le repère situé sur la *__feuille annexe__*.
b) A est-il le milieu de $[CE]$?
c) Démontrer que le triangle ADE est isocèle en A. Ce triangle est-il rectangle ?

Exercice 4 *(7 points - 20 minutes environ)*

On considère le fonction f définie sur ℝ par $f(x)=(x^2+2x)(1-x)$.
f est représentée graphiquement sur la *feuille annexe* sur une partie de son ensemble de définition.

1. On considère la fonction *g* définie par $g(x)=-2x-4$.
a. Quelle est la nature de la courbe C_g représentant *g* ?
b. Représenter C_g sur le graphique de la *feuille annexe*.

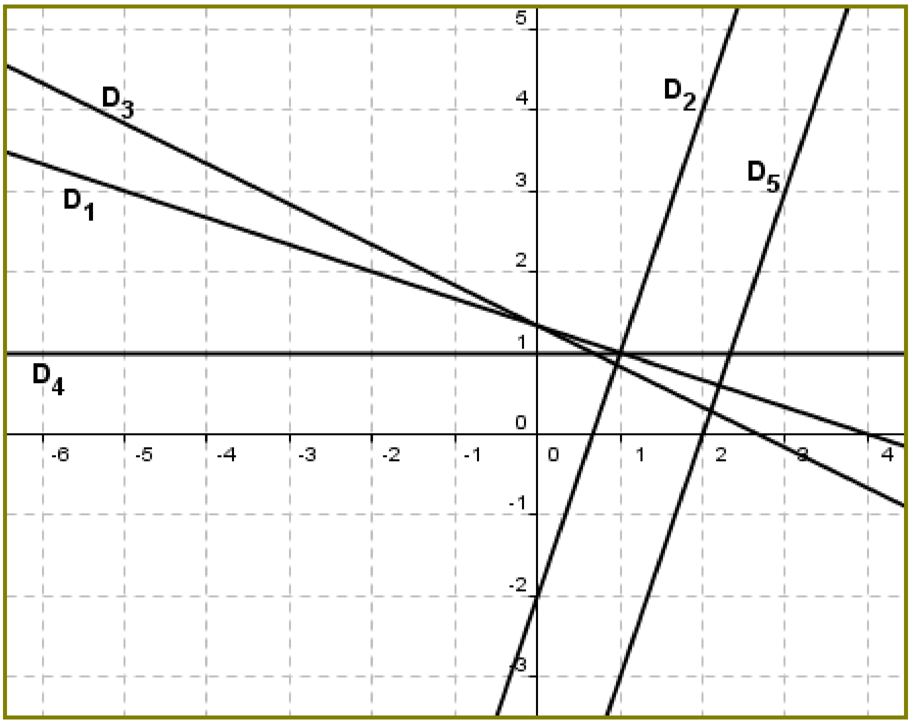
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$. Vous laisserez vos traces de lectures sur le graphique.

3. a. Prouver que $-x^3-x^2+4x+4=(4-x^2)(x+1)$ pour tout *x*.
b. Prouver que l'équation $f(x)=g(x)$ est équivalente à $-x^3-x^2+4x+4=0$ puis résoudre cette équation en utilisant la question précédente.

Exercice 5 *(5 points - 10 minutes environ)*

On considère cinq fonctions affines définies par :

- $f_1(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}$
- $f_2(x)=3x-2$
- $f_3(x)=3x-6$
- $f_4(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$
- $f_5(x)=1$

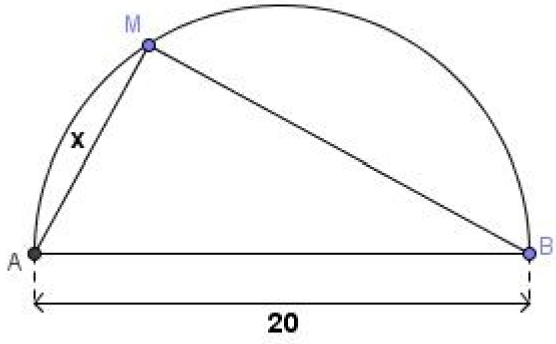


dont les représentations graphiques sont ci-contre.

Associer à chaque fonction sa représentation graphique en complétant le tableau situé sur la *feuille annexe*.

(aucune justification n'est demandée).

Exercice 6 *(8 points – 25 minutes environ)*



M est un point variable du demi-cercle de diamètre [*AB*] et de diamètre 20 cm ci-dessus.
Objectif : déterminer la ou les positions du point *M* pour lesquelles *MA* + *MB* = 28 cm.
On pose $x = MA$ (on a $x \in [0 ; 20]$).

Les 3 parties de ce problème peuvent être traitées de façon indépendante, la partie 3 étant une partie bonus.

Partie 1: Mise en équation du problème :

1. Démontrer que le triangle *MAB* est rectangle en *M*.
2..En utilisant le théorème de Pythagore, exprimer MB^2 en fonction de *x*.
3. En utilisant la relation *MA* + *MB* = 28, donner une autre expression de MB^2 en fonction de *x*.
4. En utilisant les résultats des 2 questions précédentes, dire quelle équation doit vérifier *x (il n'est pas demandé de résoudre cette équation).*
5. Montrer que l'équation précédente se ramène à $x^2 - 28x + 192 = 0$.

Partie 2 : Résolution graphique:
Nous allons observer le comportement de la fonction $f(x) = x^2 - 28x + 192$, pour *x* compris entre 0 et 20.

1. Compléter le tableau de valeurs de la fonction *f* sur la *feuille annexe* (aucun calcul n'est demandé, vous pouvez utiliser la table de votre calculatrice).

2. A l'aide de la question précédente, construire sur la *feuille annexe* la courbe représentative de la fonction *f*.

3. Faire une conjecture sur les solutions de l'équation $x^2 - 28x + 192 = 0$ (vous ferez apparaître les traces de lecture sur le graphique).

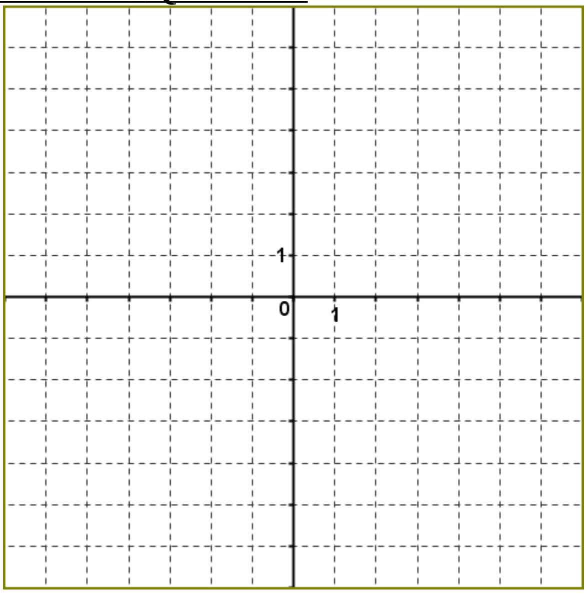
BONUS:
Partie 3 : Recherche des solutions exactes :
Rappel : la partie 1 de ce problème a mis en évidence que les positions possibles de M sur le cercle sont comprises entre 0 et 20 et solutions de l'équation $x^2 - 28x + 192 = 0$.

1. Prouver que, pour tout nombre *x*, $x^2 - 28x + 192 = (x - 14)^2 - 4$.
2. En déduire les solutions de l'équation $x^2 - 28x + 192 = 0$.

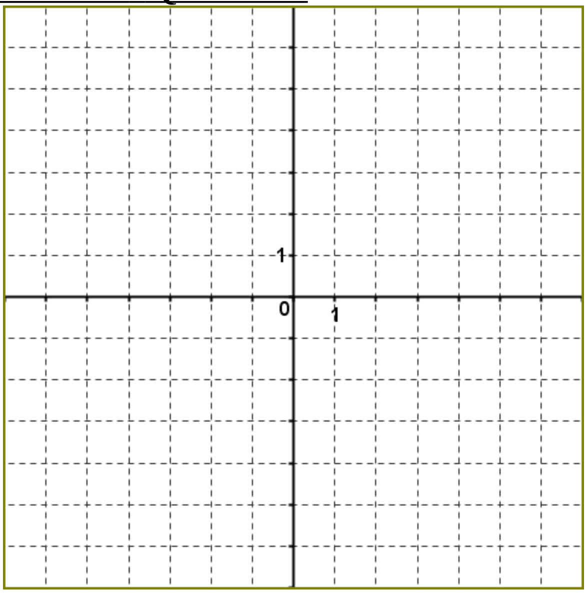
3. En déduire les positions exactes possibles du point M, qui répondent au problème posé.
4. Comparer les résultats de la question précédente avec ceux de la dernière question de la partie 2.

ANNEXE à rendre avec votre copie **Nom et classe :**

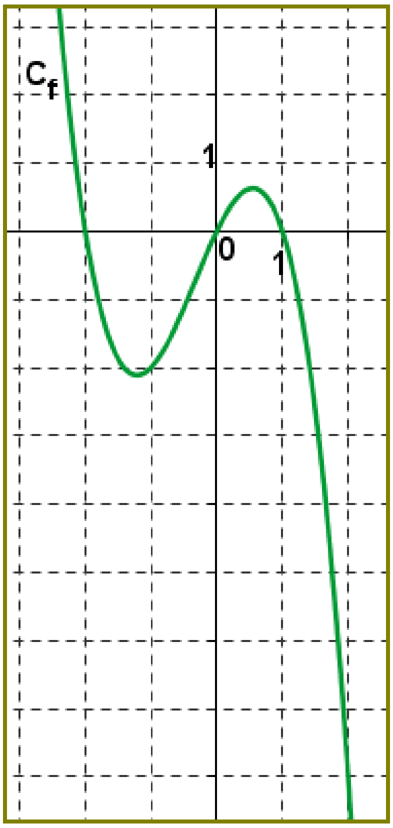
Exercice 1 – Question 5.



Exercice 3 – Question 1.



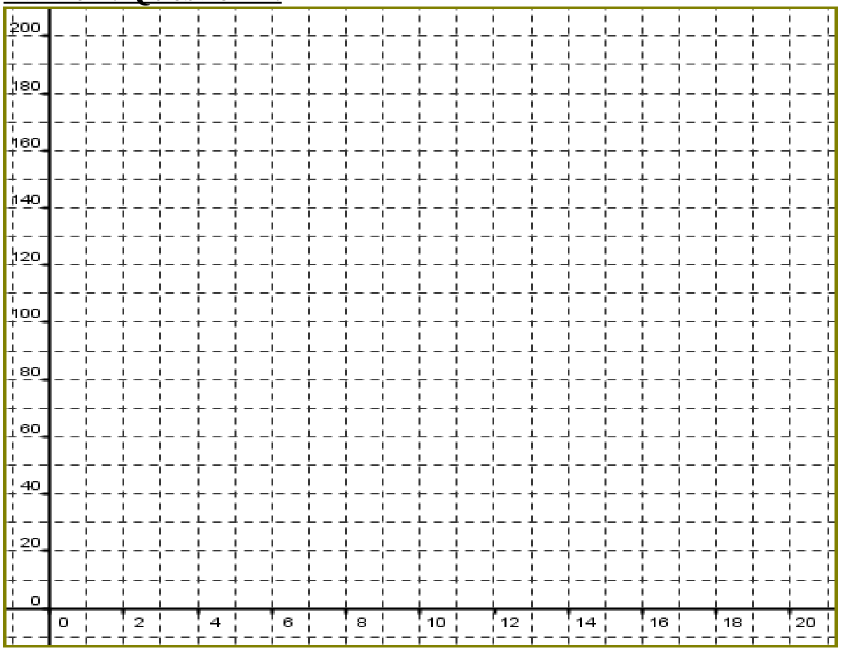
Exercice 4 :



Exercice 6 –Partie 2. Question 1.

x	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	20
$f(x)$												

Partie 2. Question 2.



Exercice 5 :

Droite	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine	Fonction associée
D_1			
D_2			
D_3			
D_4			
D_5			